ЗНАНИЕ

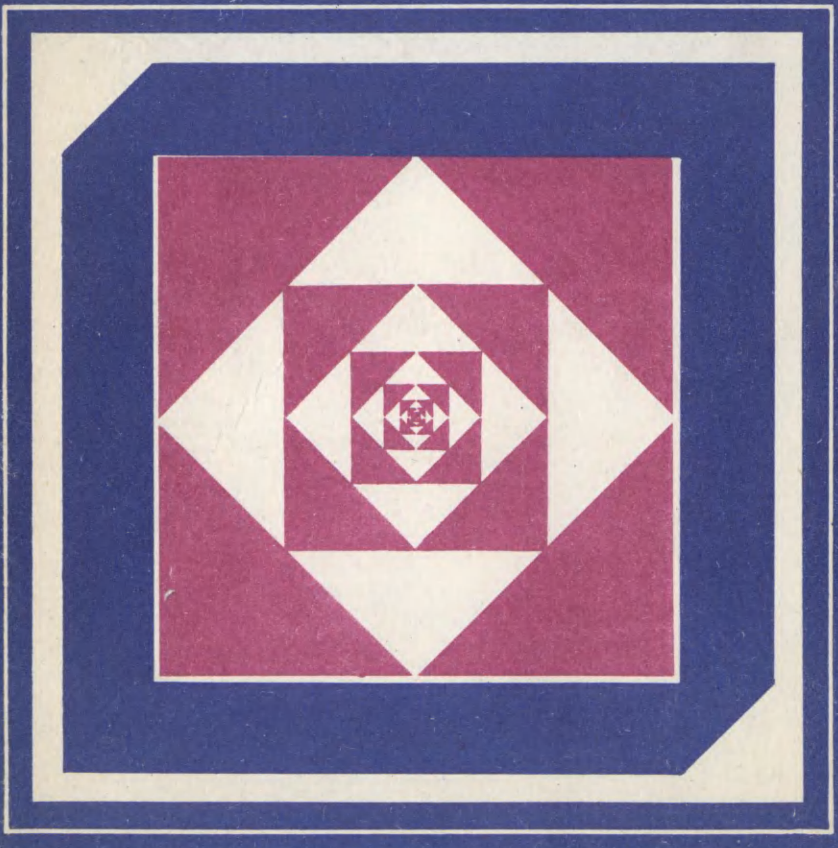
НОВОЕ
В ЖИЗНИ,
НАУКЕ,
ТЕХНИКЕ

СЕРИЯ
МАТЕМАТИКА,
КИБЕРНЕТИКА

3'80

Ю. И. Алимов

АЛЬТЕРНАТИВА МЕТОДУ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ



НОВОЕ
В ЖИЗНИ,
НАУКЕ,
ТЕХНИКЕ

Серия
«Математика,
кибернетика»,
№ 3, 1980 г.

Издается
ежемесячно
с 1967 г.

Ю. И. Алимов,

доктор технических наук,
профессор

АЛЬТЕРНАТИВА МЕТОДУ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Издательство
«Знание»
Москва
1980

Алимов Ю. И.

А50 Альтернатива методу математической статистики. М., «Знание», 1980.

64 с. (Новое в жизни, науке, технике. Серия «Математика, кибернетика», 3. Издается ежемесячно с 1967 г.).

Рассказывается о фундаментальном принципе естественных наук — требовании многократной воспроизводимости предсказываемого экспериментального результата. С точки зрения этого принципа прослеживается логика построения исходных концепций прикладной теории вероятностей и критически анализируются типичные положения математической статистики. Излагается альтернатива этим положениям, нашедшая свое математическое оформление в подходе Р. Мизеса.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математической статистикой.

20204 22.172

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последнее время и математики и те, кто применяют ее в своей практической деятельности, часто выражают озабоченность тем, что математические модели во многих случаях оказываются заметно оторванными от реальности. Из-за этого отрыва недостаточно эффективно используется труд высококвалифицированных специалистов и дорогостоящее машинное время. Критика — порой весьма резкая — такого состояния дел все чаще встречается не только в статьях и монографиях, предназначенных для специалистов, но и в учебниках и научно-популярных изданиях (см., например, [1—4]). Показательно, что в учебнике [3] цитируется из дидактических соображений статья Д. Шварца под названием «О пагубном влиянии математики на науку».

Нередко далекими от реальности оказываются, в частности, модели, предлагаемые математической статистикой. Специально условиям и границам применимости вероятностно-статистических методов посвящены брошюры В. Н. Тутубалина [5—7], опубликованные в серии «Математика, кибернетика». Много внимания уделено подобным вопросам и в учебнике [8], написанном тем же автором. По своей «ограничительной» направленности настоящая брошюра примыкает к этим публикациям.

Сразу же подчеркнем, что брошюра ни в коей мере не направлена против статистики как таковой. (Под статистикой мы подразумеваем любые усреднения или другую «совокупную» обработку экспериментальных данных с целью получения их *прогнозируемых интегральных характеристик;* относительно этих характеристик предполагаем, что они будут затем измеряться для аналогичных экспериментальных данных в предстоящих опытах, и, таким образом, правильность статистического прогноза в самом деле будет проверяться экспериментом.) Мы также совсем не против использования математики в статистике: последняя без математики попросту немыслима.

Речь ниже пойдет именно о *математической статистике*. Взяв любое руководство по этой дисциплине, легко убедиться, что под математической статистикой подразумевают далеко не всякое использование математики в статистике. Если присмотреться, математическая статистика — это весьма специфическая дисциплина, обладающая своим характерным методом. Отличительной чертой ее метода является *домысливание ровно одного «этажа» вероятностей*, называемых доверительными вероятностями, или уровнями значимости, *сверх тех, которые действительно измеряются в эксперименте.* И вот с таким специфическим подходом можно не соглашаться. Можно применять математику в статистике и несколько иначе, чем это предписывается математической статистикой.

На практике давно используются принципы статистической обработки экспериментальных данных, не апеллирующие к доверительным вероятностям и потому чуждые устоям математической статистики. В физической литературе мы находим, к примеру, такую запись измеренной вакуумной поправки к магнитному моменту электрона: $0{,}0011609 \pm 0{,}0000024$. Здесь фигурирует только максимальная погрешность измерений. В последнее время физики стали иногда указывать не максимальную, а среднеквадратическую погрешность измерения последних цифр экспериментального результата (обычно в круглых скобках). Например, для скорости света в вакууме указывается величина $c = 2{,}9979250(10) \cdot 10^8$ м/с. Существенно, что максимальная и среднеквадратическая погрешности *здесь действительно измерялись* в отличие от доверительных вероятностей, которыми оперирует математическая статистика.

Пропаганда математической статистики активно велась в течение многих лет. И все же физики, наверное, и в наши дни не удержались бы от улыбки, если бы им сказали, например, что, обработав результаты измерения скорости света согласно предписаниям математической статистики, получаем следующее: c попадает в такой-то доверительный интервал с доверительной вероятностью $P = 0{,}99$, и в эдакий, более узкий, соответственно с вероятностью $P = 0{,}95$.

Ссылки на физиков будут встречаться и ниже. Именно в физике были заложены основы современного точного естествознания, именно здесь накоплен наибольший опыт сложного и тонкого экспериментирования и сложилась высокая культура трезвой обработки экспериментальных данных. С другой стороны, именно физика подала другим фундаментальным и прикладным дисциплинам пример математизации, который, как это теперь часто признают, оказался не совсем хорошим. Непосредственно к этому вопросу мы вернемся в конце брошюры.

Главная цель настоящей брошюры — рассказать о принципах такой обработки данных, при которой воздерживаются от упоминания о доверительных вероятностях. Эти принципы появились даже раньше математической статистики, собственно говоря, одновременно с появлением первых количественных экспериментальных результатов в естествознании. Однако эти принципы получили отражение в теории вероятностей с большой задержкой — в процессе развития того подхода к математическому оформлению теории вероятностей, который связывают с именем Р. Мизеса. Мизесовский подход живо обсуждается не одно десятилетие, ему были посвящены и статьи автора [9, 10], а также учебные пособия [11—13].

Связь мизесовского подхода с принципами и приемами, альтернативными методу математической статистики, весьма органична. Поэтому содержание настоящей брошюры в значительной мере сводится к последовательному — хотя, разумеется, лишь схематичному — изложению данного подхода. Такое изложение в литературе, доступной широкому кругу читателей, пока отсутствует.

В настоящей брошюре внимание сосредоточено на вопросах *интерпретации и практического применения* теоретико-вероятностных понятий. В отличие от решений чисто математических проблем любые ответы на такого сорта вопросы всегда в значительной степени спорны. Читатель, конечно же, должен иметь это в виду. Ниже излагается подход, заметно отличающийся от той позиции, которую занимают стандартные руководства и большинство работ по теории вероятностей и математической статистике. Повторим, что излагаемая нами точка зрения отнюдь не нова. Крайний вариант ее хорошо выражают, например, слова Ф. Дж. Анскомба (цитируем по брошюре [14, с. 43] серии «Математика, кибернетика»): «Недопустимо отождествлять «статистику» с абсурдным явлением, общеизвестным под именем «математическая статистика».

Глава 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ПРОГНОЗИРОВАНИИ

Конечной целью естественнонаучных исследований — и фундаментальных, и прикладных — является надежный *прогноз* результатов предстоящих экспериментов (под экспериментами мы подразумеваем не только исследовательские, поисковые опыты, но и эксплуатацию различных устройств и систем, а в понятие прогноза включаем проектирование всевозможных приборов, устройств, систем и т. д.). Прогнозирование в форме требования воспроизводимости публикуемого результата было принято — если угодно, по определению — в качестве конечной цели и отличительной черты естественных наук еще при их зарождении. В этом требовании заключено, пожалуй, главнейшее отличие естественных наук от магии.

К сожалению, приходится констатировать, что прогнозирование как конечная цель естественнонаучных теорий отчасти ускользало и ускользает от внимания даже самих ученых. Видимо, отсюда проистекает наблюдаемое иногда увлечение такими расплывчатыми формулировками целей научного исследования, как «объяснение» или «раскрытие сущности» явлений. Примером тому может служить отмеченная — не без едкости — в [15] склонность химиков «объяснять» с высокой точностью явление постфактум посредством обильного введения в формулы подгоночных параметров. Подбором должного количества таких параметров всегда можно добиться идеального совпадения расчетной и эмпирической кривых — только не до того, как последняя получена в эксперименте.

А. И. Китайгородским [15] предложена формула для количественного показателя P ценности теории $P=(k/n)-1$, здесь k — число величин, которые можно предсказать с помощью оцениваемой теории, а n — число подгоночных параметров теории. Согласно этой формуле ценность теории равна нулю, если для объяснения эксперимента вводят ровно столько параметров, сколько величин измеряется в эксперименте. Ценность теории значительна, если $k \gg n$. Разумеется, читатель вправе видеть в данной формуле шутку, но эта шутка из тех, что содержат большую долю истины.

Несколько избыточное подчеркивание идеи прогноза, имеющее место в новейшей дисциплине — *прогностике* [16], должно быть, является реакцией на упомянутое частичное забвение этой фундаментальной идеи. В этой связи еще раз отметим, что в любой конкретной области естественнонаучного исследования прогнозирование ни в коем случае не является новинкой и здесь за многие годы накоплен большой и трудно доставшийся специфический опыт прогнозирования. Едва ли возможно создание какой-то принципиально новой — общей и притом в самом деле содержательной — теории прогнозирования. В то же время унификация терминологии, связанной с прогнозированием, несомненно, может сыграть некоторую положительную роль.

Научный прогноз имеет форму гипотезы следующего типа: возпроизведение в эксперименте определенных контролируемых условий U всегда приведет к одному и тому же — в пределах оговоренной точности — результату V. Контроль условий эксперимента U и получение результата V означают не что иное, как *измерение* определенных физических величин, за которыми мы оставим обозначения U и V. Процедуру измерения величин U и V (их так называемое *операциональное определение*) следует оговаривать с достаточной аккуратностью, иначе сколько-нибудь убедительная экспериментальная проверка прогноза окажется невозможной. Прогноз охарактеризованного нами типа условимся называть прогнозом $U \to V$ (« от U к V»).

Формулирование научного прогноза $U \to V$ зачастую представляет собой внутренне сложный и, скорее всего, не поддающийся эффективной алгоритмизации процесс, в котором тесно переплетаются эмпирические и теоретические изыскания. Заключительная же проверка (верификация) сформулированного прогноза всегда носит эмпирический характер и состоит в *многократном* воспроизведении условий эксперимента U и измерении получаемых результатов V, или, как это принято писать в литературе по теории вероятностей, — в проведении серии *однородных испытаний*. Только многократное постоянное получение устойчивых, т. е. близких друг к другу, результатов в *длинной* серии однородных испытаний служит в естественных науках окончательным обоснованием надежности прогноза $U \to V$. Это обоснование нельзя, конечно, считать непогрешимым, поскольку оно тоже представляет собой всего лишь *прогноз* «как было, так и будет», издавна связываемый с понятием *эмпирической индукции* [17]. Эмпирико-индуктивное обоснование надежности прогноза в науке отличается от такового в повседневной жизни, собственно, не принципом действия, а отмеченными выше аккуратностью измерений величин U, V и *многократностью* повторения однородных проверочных испытаний.

В книге [18], прямо относящейся к предмету нашего разговора, для многократно проверенного прогноза применен выразительный термин *перманентность*. Воспользовавшись последним, можно сказать, что конечной целью естественнонаучного исследования является отыскание новых перманентностей. Мы уже отмечали внутреннюю сложность такого поиска, внешне же он выглядит следующим образом. Многократно воспроизводя с достаточно высокой точностью одни и те же контролируемые условия эксперимента U_1, измеряют в качестве результата испытания некоторую величину V_1. При этом нередко убеждаются в отсутствии перманентности $U_1 \to V_1$, т. е. в том, что значения V_1 заметно меняются от испытания к испытанию, не взирая на стабильность условий U_1, а значит, не поддаются прогнозированию с нужной точностью. Затем многократно воспроизводят, вообще говоря, другие условия U_2 и измеряют в качестве результата испытания другую величину V_2. Не обнаружив перманентности $U_2 \to V_2$, переходят к величинам U_3 и V_3 и т. д. Варьирование величин U_i и V_j (i, $j=1, 2, \ldots$) иногда осуществляют совместно, иногда по отдельности. Например, порою варьируют U_i, оставляя неизменным характер величины V_1 с тем, чтобы с помощью более детального контроля и улучшенной стабилизации условий эксперимента — так сказать, их рафинирования — сделать предсказуемыми значения именно данной физической величины V_1. С другой стороны, часто варьируют V_j при фиксированных условиях U_1.

При благоприятном исходе поиска в конце концов находят некую удовлетворяющую исследователя перманентность $U \to V$. Предсказуемую величину V часто именуют неслучайной или детерминированной (при контролируемых условиях U). Исход поиска иной раз оказывается и неблагоприятным.

Найденная перманентность в подавляющем большинстве случаев бывает всего лишь относительной: измеренные значения величины V обычно совпадают в разных испытаниях при стабильных контролируемых условиях U только приблизительно, обнаруживая некоторое рассеивание. Таким образом, все или почти все физические величины оказываются, с точки зрения экспериментатора, случайными, т. е. точно не предсказуемыми величинами, а эпитет «неслучайная» обычно присваивается величине, которая вообще-то случайна, но меняет свои значения от испытания к испытанию незначительно. Объективная реальность вряд ли когда бы то ни было виделась экспериментатору жестко детерминированной. Трудно согласиться с встречающимися в литературе (например, [19]) утверждениями, что в связи с появлением квантовой механики и широким применением статистики в XX веке у естествоиспытателей в целом происходит мучительная смена детерминистической картины мира (парадигмы) картиной вероятностной. По-видимому, драматическая смена парадигм имела место в основном у теоретиков, находившихся в силу склада их натуры на значительном удалении от эксперимента. Даже механика Ньютона, часто трактуемая как опора и наиболее яркое воплощение детерминизма, доставляет далеко не жестко детерминистическую картину механических явлений, если учитываются неизбежные погрешности измерений (см., например, [20], [21, часть 2]).

Приведенные соображения относительно перманентностей послужат нам отправной точкой для всего дальнейшего изложения. В главе 2 мы шаг за шагом проследим логику построения исходных концепций теории вероятностей, заняв при этом, как уже указывалось в предисловии, позицию того, кто, применяя теорию вероятностей (в дальнейшем для краткости мы будем называть его прикладником), обязан сравнивать результаты расчетов с экспериментальными результатами. Глава 2, по сути дела, и будет изложением альтернативы методу математической статистики, которое завершится в главах 3 и 4 его прямым анализом и выводами. В последних главах попутно обсуждаются исторические корни математической статистики.

Глава 2. ИСХОДНЫЕ КОНЦЕПЦИИ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Случайные величины и их моменты. Итак, пусть проводится серия испытаний, заключающихся в воспроизведении одних и тех же контролируемых условий эксперимента U и в измерении некоторой величины X. Предельно лаконичный протокол серии таких однородных испытаний имеет вид конечной числовой последовательности

$$\{X(s)\}_1^N = \{X(1), X(2), \ldots, X(m), \ldots, X(N)\}.$$

Здесь и всюду далее применяются следующие обозначения: s — номер испытания (следуя Р. Мизесу, мы будем отождествлять в рамках теории вероятностей номер испытания с самим испытанием); $X(s)$ — значение величины X, измеренной в испытании s; m и N — соответственно текущее (рассматриваемое в данный момент) и общее количество проведенных испытаний.

Пусть по мере увеличения количества $m=\overline{1, N}$ проведенных испытаний мы анализируем протокол $\{X(s)\}_1^m$ с целью предсказать значение величины $X(s)$ в предстоящем $(m+1)$-м испытании.

Хорошо известно, что попытки предсказывать нередко кончаются неудачей: в последовательности $\{X(s)\}_1^m$ зачастую не удается подметить четкой и подтверждающейся закономерности, даже если m велико. Простейший поиск перманентности $U \to V$ осуществляют в данной ситуации путем перехода от исходной непредсказуемой величины $V_1=X(s)$ к «вторичной» величине $V=V(m)=M_m[X]$, где

$$M_m[X]=\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} X(s), \quad m=\overline{1, N}.$$

Величину $M_m[X]$, которая, вообще говоря, тоже непредсказуема, называют *эмпирическим средним* случайной величины $X(s)$ для серии из m испытаний. Переменная m играет здесь роль номера нового — вторичного по отношению к s — испытания, состоящего в измерении величины $M_m[X]$. Протокол этих вторичных измерений обозначим через $\{M_m[X]\}_1^N$. Обращаем внимание на то, что в обозначениях непредсказуемых величин $X(s)$ и $M_m[X]$ у нас выписаны номера соответствующих испытаний, так как в эксперименте всякая измеряемая величина — и предсказуемая и непредсказуемая — появляется именно как функция от номера испытания.

Как показывает анализ последовательностей $\{M_m[X]\}_1^N$, эмпирическое среднее непредсказуемой величины $X(s)$ довольно часто (хотя и не всегда!) действительно обнаруживает должную устойчивость в том смысле, что разброс значений $M_m[X]$ в конце концов ощутимо уменьшается по мере возрастания m:

$$M_m[X] \simeq M[X] \text{ при } N \geqslant m \geqslant m_\varepsilon, \quad \text{где } N \gg m_\varepsilon. \qquad (1)$$

Здесь $M[X]$ — некоторая константа, а m_ε — то наименьшее количество испытаний, начиная с которого, по мнению исследователя, уже постоянно соблюдалось приближенное равенство (1). Обычно получается, что $m_\varepsilon \gg 1$. Напомним, что через N обозначено общее количество проведенных испытаний. Типичный график зависимости $V(m) = M_m[X]$ представлен на рис. 1. Для наглядности график изображен в виде ломаной.

Процедуры измерения константы $M[X]$ должны по своей сущности заключаться в проведении средней горизонтальной линии для «хвоста» ломаной $V(m) = M_m[X]$, что и показано на рисунке. Назовем подобные процедуры *схемой удлиняющейся серии*, оттеняя то обстоятельство, что здесь анализируют картину поведения указанной ломаной при возрастании m от 1 до N. В такого рода анализе, собственно, и состоит всякое исследование устойчивости эмпирического среднего.

Если приближенное равенство (1) соблюдалось в уже проведенных испытаниях, то допустимо предположить, что и при дальнейшем удлинении серии однородных испытаний значения $M_m[X]$ будут близки к той же константе:

$$M_m[X] \simeq M[X] \text{ для любых } m > N \text{ (или в сокращенной записи } \forall m > N). \tag{2}$$

Переход в схеме удлиняющейся серии от перманентности (1), наблюдавшейся во многих ($N \gg m_\varepsilon$) проведенных испытаниях, к прогнозируемой перманентности (2) представляет

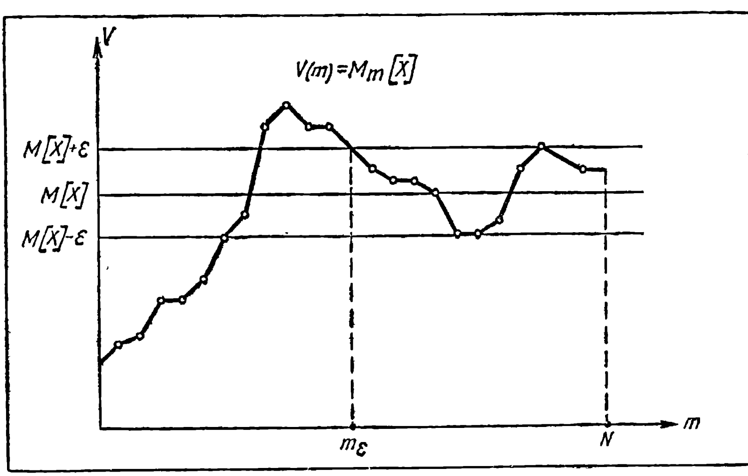


Рис. 1

собой разновидность эмпирико-индуктивного заключения «как было, так и будет».

Константа $M[X]$, вблизи которой группировались значения $M_m[X]$ к концу серии проведенных испытаний и которую принимают в качестве приближенной оценки значений $M_m[X]$ на будущее, как раз и является, с точки зрения прикладника, тем, что называют *математическим ожиданием* случайной величины $X(s)$. Короче говоря, математическое ожидание — это *прогнозируемая* грубая оценка эмпирического среднего.

Более точная оценка могла бы выглядеть как прогноз

$$|M_m[X]-M[X]|<\varepsilon, \quad \forall m>N \tag{3}$$

интервала $(M[X]-\varepsilon,\ M[X]+\varepsilon)$, в котором, судя по наблюдавшемуся при $N\geqslant m\geqslant m_\varepsilon$ поведению ломаной $V(m)=M_m[X]$, значения $M_m[X]$, видимо, будут оставаться и впредь (см. рис. 1). Интервальные оценки типа (3) для эмпирического среднего возникают с неизбежностью, как только пытаются придать ясный смысл приближенным равенствам (1), (2) и выражению «должная устойчивость».

Устойчивость эмпирического среднего или каких-либо других усредненных характеристик протокола измерений часто называют *статистической устойчивостью* (результатов измерений). Мы далее будем постоянно пользоваться этим удобным общим термином, указывая, в случае надобности, об устойчивости каких именно усредненных характеристик идет речь.

Проводить на глаз среднюю прямую линию $V=M[X]$ можно на одном и том же графике несколько по-разному. Соответственно, можно по-разному реализовать схему удлиняющейся серии в программах для ЭВМ. Неоднозначность в результатах таких измерений математического ожидания $M[X]$ не должна удивлять. Результаты измерения любой физической величины абсолютно однозначными, как правило, не бывают.

Мы и далее будем говорить об *измерении* математического ожидания, однако это всего лишь удобное сокращение: оператор математического ожидания M, в отличие от оператора M_m эмпирического среднего, символизирует у нас не просто измерение или вычисление, а главным образом исследование статистической устойчивости и *прогнозирование*.

Математическое ожидание $M[X]$ называют также первым начальным моментом случайной величины $X(s)$. На практике операторами M_m и M часто действуют в описанном выше смысле и на последовательности вида $\{X^k(s)\}_1^m$ или $\{\mathring{X}^k(s)\}_1^m$, где $\mathring{X}(s)=X(s)-M[X]$. Тем самым измеряют начальные $M[X^k]$ и центральные $M[\mathring{X}^k]$ моменты k-го порядка (для не слишком больших значений $k>1$). Все сказанное об $M[X]$ относится в своих существенных чертах и к моментам высших порядков.

Мы обсудили такие процедуры измерения математического ожидания и моментов вообще, которые именуют статистическими. Всюду дальше имеются в виду *только такие процедуры*. Применительно к ним нет никакого смысла говорить, например, о математическом ожидании или дисперсии *каждого отдельного* измерения случайной величины $X(s)$; любые моменты усредненно характеризуют весь длинный протокол $\{X(s)\}_1^m$ *в целом*. Можно сказать, что при статистическом подходе в роли случайной величины выступает весь протокол как единое целое, но не результат каждого отдельного измерения.

Нестатистические же процедуры измерения математических ожиданий, в частности экспертные оценки, наверное, небесполезны, однако с точки зрения метрологии они выглядят не очень серьезно.

Вопрос о наличии статистической устойчивости весьма актуален в приложениях теории вероятностей. Обсудим его подробнее.

В литературе встречаются высказывания типа «если испытания однородны, то статистическая устойчивость налицо». Данное высказывание проверяемо, очевидно, лишь тогда, когда под однородностью испытаний подразумевают стабильность *контролируемых* условий эксперимента. Но в этом случае оно, вообще говоря, ложно уже оттого, что ряд существенных факторов может оказаться незамеченным. Так, однажды в лаборатории Э. Резерфорда результаты эксперимента с новым радиоактивным веществом (теперь оно называется радоном) стали форменно хаотичными, хотя условия эксперимента были такими же, как и раньше. Исследователи не сразу догадались, что новое вещество — газ; все ранее открытые радиоактивные вещества газообразными не были. Условия эксперимента были дополнительно рафинированы (устранили сквозняки, перестали поблизости курить и чихать), и только после этого статистическая устойчивость восстановилась.

Любой экспериментатор всегда может столкнуться в своей работе с подобными замаскированными факторами, осложняющими жизнь. В силу этого объективного обстоятельства именно выходную характеристику эксперимента — наличие статистической устойчивости, а не его входную характеристику — постоянство контролируемых условий U — приходится считать на практике окончательным критерием достаточной однородности испытаний. Иными словами, приходится считать приемлемыми разве что инверсные высказывания типа «если статистическая устойчивость налицо, то испытания однородны».

Допущение о должной статистической устойчивости принадлежит к тем исходным интуитивным посылкам, которые попросту уже не из чего выводить строго логически или математически. Наиболее убедительно обосновывать эту посылку можно только чисто эмпирически — с помощью эмпирической индукции.

На практике довольно часто полагают $M[X]=M_N[X]$, пренебрегая анализом последовательности $\{M_m[X]\}_1^N$. Такая упрощенная процедура измерения математического ожидания, которую мы назовем *схемой фиксированной серии*, является отступлением от идеи эмпирической индукции и означает отказ от исследования статистической устойчивости. Схема фиксированной серии доставит определенное значение $M[X]$ и тогда, когда рассмотрение всей последовательности $\{M_m[X]\}_1^N$ не выявило бы должной статистической устойчивости (1), например, тогда, когда ломаная $V(m)=M_m[X]$ неуклонно поднимается с ростом m (монотонный тренд).

Мы сейчас вернулись к тому, что должная статистическая устойчивость (1) наблюдается не всегда, даже если серия проведенных испытаний была длинной; ответ на вопрос о наличии статистической устойчивости может быть как положительным, так и отрицательным. При отсутствии должной статистической устойчивости (1) нет оснований оценивать значения $M_m[X]$ с помощью одной константы $M[X]$. Это означает, что в данной ситуации понятие математического ожидания неприменимо. Таким образом, вопрос о наличии статистической устойчивости вполне резонно ставить и в следующей более острой форме: применимо ли к данной случайной величине понятие математического ожидания? В общем случае речь пойдет о применимости и других, более сложных теоретико-вероятностных понятий, словом, о самой применимости теории вероятностей к рассматриваемым конкретным непредсказуемым величинам.

Попутно заметим, что в обычном русском языке и в философском лексиконе слово «случайность» очень давно и очень широко употребляется для обозначения непредсказуемости как таковой, без обязательной связи с теорией вероятностей. Слово «случайность» в данном широком смысле прочно вошло в обиход вообще задолго до того, как теория вероятностей стала сколько-нибудь известной за пределами узкого круга математиков; по всей видимости, оно укоренилось даже до появления слова «непредсказуемость». Придерживаясь общелитературных норм, мы только что применяли словосочетание «случайная величина» в качестве точного синонима словосочетания «непредсказуемая величина».

Между тем математики стали постоянно называть случайной величиной функцию, измеримую относительно нормированной меры (см., например, [8]). Такая «узурпация» общелитературных слов для обозначения чисто математических объектов породила в данном случае значительную путаницу, причем сразу в двух различных аспектах: с одной стороны, многим стало казаться, будто любая случайность, т. е. непредсказуемость может быть успешно описана в теоретико-вероятностных терминах, а с другой, — у многих создалось впечатление, что теория вероятностей органически применима только к непредсказуемым величинам.

Действительно, под влиянием математической литературы в инженерных и естественнонаучных интерпретациях теории вероятностей под случайной величиной нередко стали подразумевать только такую непредсказуемую величину, которая демонстрирует статистическую устойчивость и потому принадлежит к сфере серьезных применений теории вероятностей. Более того, следуя математикам, под случайной величиной здесь стали подразумевать именно такую непредсказуемую величину, к которой применимо самое сложное понятие прикладной теории вероятностей — понятие распределения вероятностей. Однако эту узко специальную интерпретацию словосочетания «случайная величина» продолжают волей-неволей путать с его широким общелитературным смыслом, поскольку последний, как и всякое языковое явление, упразднить не так-то просто. Вот и возникает у читателей литературы по прикладной теории вероятностей и математической статистике (в особенности у начинающих) иллюзия того, что эти дисциплины применимы ко всем без исключения случайным — в широком смысле, т. е. непредсказуемым — величинам. И, таким образом, важнейший вопрос об эмпирическом обосновании применимости теоретико-вероятностных понятий к рассматриваемым конкретным непредсказуемым величинам порою полностью выпадает из поля зрения.

С другой стороны, читатель, постоянно наталкиваясь в математических текстах на словосочетание «случайная величина», начинает думать, что математические предложения теории вероятностей как-то непосредственно относятся к непредсказуемым величинам, а то и только к ним. На самом деле эти предложения являются обычными математическими теоремами, относящимися к самым обычным функциям и не имеющими ни малейшего формально-логического отношения к непредсказуемым величинам и вообще к обыденному понятию и философской категории «случайность».

Этот второй аспект путаницы дает в конечном счете тот же основной эффект, что и первый: у прикладника притупляется чувство личной ответственности за применение теоретико-вероятностных понятий и предложений к рассматриваемым конкретным непредсказуемым величинам. Проблему перевода математических предложений теории вероятностей на язык эксперимента мы еще затронем ниже. Вдобавок этот второй аспект затрудняет понимание того, что при моделировании случайных величин — быть может, в отличие от прямого их воспроизведения — необходимо максимально устранять всякий элемент случайности, точнее, непредсказуемости. Такая метрологически жесткая установка представляет собой прямое следствие из фундаментальнейшего естественнонаучного требования воспроизводимости публикуемого результата.

В последнее время для обозначения непредсказуемости, вообще говоря, не вписывающейся в рамки теоретико-вероятностных понятий, стали употреблять термин «неопределенность» (см., например, [8, с. 145]). К сожалению, это вряд ли устранит вышеозначенную путаницу. Ибо если под случайностью подразумевать только непредсказуемость, сопровождающуюся статистической устойчивостью и, стало быть, всерьез «вписывающуюся» в теорию вероятностей, то неясно, как толковать употребительное словосочетание «неслучайная величина»: то ли это предсказуемая, детерминированная величина, то ли, наоборот, величина столь непредсказуемая, что статистической устойчивости нет и теория вероятностей здесь неприменима.

Наверно, было бы хорошо условиться выделять величины, к которым применима теория вероятностей, какимнибудь специализированным эпитетом, не нагруженным обыденными ассоциациями и не оттеняющим вовсе необязательное свойство непредсказуемости. Например, можно говорить о стохастических или вероятностных величинах, что зачастую и делается.

Во избежание смещения акцентов мы сейчас подчеркнем, что о статистической устойчивости вполне допустимо говорить и применительно к неслучайным, т. е. хорошо предсказуемым величинам. Ведь ничто в принципе не запрещает рассматривать эмпирическое среднее, допустим периодической величины $X(s)$, равной нулю при четных s и единице — при нечетных. Другое дело, что на практике к исследованию статистической устойчивости обычно приступают только после того, как убедятся в своей неспособности предсказывать величину $X(s)$ точно. Такой поиск перманентности, осуществляемый по принципу «лучше прогнозировать что-нибудь, чем ничего», мы и описали выше. Между тем легко представить себе ситуацию, когда ограничиваются исследованием только статистической устойчивости, несмотря на то, что есть принципиальная или даже реальная возможность точно предсказывать и самую величину $X(s)$. Получение точного прогноза может оказаться слишком дорогим, а то и попросту ненужным делом.

Следовательно, непредсказуемость величин отнюдь не является обязательным условием применимости к ним теории вероятностей. Важно, чтобы величина $X(s)$ измерялась многократно — в длинной серии испытаний и демонстрировала статистическую устойчивость. Поэтому оба конкурирующих эпитета — «непредсказуемая» и «случайная» — в применении к величине $X(s)$ мы будем далее опускать всюду, где они представляются не относящимися к делу. А так будет почти всегда.

Терминологические вопросы, понятно, не относятся к наиболее важным. И все же язык — не безобидная вещь даже в науке. Неудачные термины и выражения, казалось бы, давно обретшие узко специальный смысл, могут исподволь деформировать восприятие и оценку того или иного научного исследования. В учебнике [8], например, указано, что название «теория игр» известной математической дисциплины оставляет желать лучшего, поскольку на самом деле здесь изучают нечто не очень похожее на игры в обычных смыслах этого широко употребляющегося слова. Видимо, лучше было бы остановиться на менее нагруженном ассоциациями специализированном термине, скажем, на встречающемся в технической литературе названии «теория матричных игр». Перечень не совсем удобных терминов можно было бы продолжить. Так, название «планирование эксперимента» представляется, пожалуй, чересчур широким и слишком много обещающим для той довольно специфической дисциплины, за которой оно закрепилось. Образцы терминов, свободных от мешающих ассоциаций, дают нам, к примеру, математический термин «мартингал» (в прошлом — исключительно элемент упряжи) или физический термин «кварк» (вообще загадочное сочетание звуков).

В связи с предпринятым обсуждением языковых вопросов здесь же коснемся и обычных для литературы по математической статистике выражений типа «эмпирическое среднее — это приближенная оценка математического ожидания». Подобные выражения располагают к тому, чтобы считать применимость понятия математического ожидания само собой разумеющейся или, другими словами, считать математическое ожидание как бы непременно объективно существующим. Между тем, с точки зрения прикладника, наиболее объективно существуют именно эмпирические средние, измеренные в объективно поставленных экспериментах. Математическое ожидание как физическая, т. е. измеряемая величина появляется несколько позже как более субъективная приближенная оценка этих эмпирических средних в прошлом, а главное — в будущем. Причем появляется не всегда, а в идеале лишь тогда, когда с достаточным правдоподобием установлена и прогнозируется статистическая устойчивость.

Таким образом, наличие статистической устойчивости (в частности, устойчивости (1) эмпирического среднего) в проведенных испытаниях, как и наличие любой другой перманентности $U \rightarrow V$, к сожалению, не вытекает с непреложностью из стабильности контролируемых условий эксперимента. Вместе с тем весь опыт естественных наук показывает, что для повышения воспроизводимости результата необходимо обеспечивать стабильность максимально возможного числа условий эксперимента, иначе к неизбежному рассеиванию результата добавиться еще и вклад, обусловленный неряшливостью. Искусственное внесение непредсказуемости в эксперимент, осуществляемое при так называемой рандомизации, а также при случайном поиске экстремума и в некоторых вычислениях по методу Монте-Карло, бросает, надо думать, чрезмерно смелый вызов естественнонаучной традиции.

Что же касается *прогноза* статистической устойчивости (например, прогноза (2)), то он не является непреложным следствием ни из стабильности контролируемых условий эксперимента, ни даже из статистической устойчивости в уже *проведенных* испытаниях: будущее есть будущее. Повторим, что здесь имеет место эмпирико-индуктивное заключение «как было, так и будет». В соответствии с общей идеей эмпирической индукции прогноз (2) выглядит тем правдоподобней, чем длиннее был слабо колебавшийся «хвост» ломаной $V(m)=M_m[X]$. Схема удлиняющейся серии при $N\gg m_\varepsilon$ естественным образом воплощает эту фундаментальную идею *многократной* проверки экспериментального результата.

Вероятность события. Проводя испытания $s=\overline{1,m}$, иногда интересуются лишь тем, происходит или не происходит при определенных контролируемых условиях эксперимента U некоторое событие A. Можно считать, что в подобных ситуациях в каждом испытании измеряют двоичную величину $X_A(s)$, которую удобно полагать равной 1, если событие A в испытании s наступило, и равной 0 — в противном случае. Будем называть величину $X_A(s)$ *индикатором* события A, а последовательность $\{X_A(s)\}_1^m$ — *протоколом-индикатором*. Применительно к индикаторам повторим вкратце все, что было сказано о величинах $X(s)$ общего вида.

Если индикатор $X_A(s)$ не поддается точному предсказанию, то в поисках перманентности часто переходят от этой исходной непредсказуемой величины к эмпирическому среднему $M_m[X_A]$, которое обозначают символами типа $\omega_m(A)$ и называют (относительной) *частотой события* A в серии из m испытаний. Это название обусловлено тем, что в соответствии с определением индикатора эмпирическое среднее $M_m[X_A]$ оказывается равным отношению количества тех испытаний, в которых наступало событие A, к общему их количеству m.

Обратим внимание на то, что событие полностью представлено здесь своим индикатором; событие A называют случайным (в любом — широком или узком смысле), если случайна величина $X_A(s)$. Словом, в рамках прикладной теории вероятностей случайные события являются не чем иным, как весьма специфической разновидностью случайных величин.

Для исследования устойчивости частоты $\omega_m(A)$ необходимо прибегнуть к эмпирической индукции в форме схемы удлиняющейся серии. В случае обнаружения должной устойчивости частоты можно измерить математическое ожидание $M[X_A]$, называемое в данной обстановке (статистической) *вероятностью* $P(A)$ события A. С точки зрения прикладника, вероятность $P(A)$ — это прогнозируемая доля тех испытаний в их длинной серии, в которых событие A наступит. Короче говоря, вероятность — это прогнозируемая грубая оценка частоты для $m \gg 1$. Подчеркнем, что вероятность, как и математическое ожидание вообще, стоит всерьез вводить в игру только тогда, когда вопрос о наличии статистической устойчивости решен положительно. Ясно, что статистическую вероятность не запрещено измерять и для предсказуемого события. Важно, чтобы в наличии была длинная серия испытаний.

На практике часто ограничиваются схемой фиксированной серии, отказываясь от анализа последовательности $\{\omega_m(A)\}_1^N$ и полагая $P(A) \simeq \omega_N(A)$. Тем самым отказываются от исследования статистической устойчивости.

Статистическая вероятность усредненно характеризует всю длинную серию рассматриваемых испытаний в целом. Если речь идет о статистической вероятности, полностью лишено смысла говорить о вероятности наступления события в каждом отдельном испытании. Должная устойчивость частоты, как и любой другой вид статистической устойчивости, к сожалению, не вытекает с непреложностью из стабильности контролируемых условий эксперимента.

Остановимся на вероятностях редких событий, характерных, например, для проблемы надежности. Если $P(A) \simeq 10^{-n}$, то это означает, что событие A наступает в среднем один раз на 10^n испытаний. Для измерения вероятности какого бы то ни было события, очевидно, необходимо провести настолько много испытаний, чтобы это событие наступило не один, а несколько раз. Следовательно, для измерения вероятности порядка 10^{-n} необходимо провести порядка 10^{n+1} испытаний.

Эти простые соображения можно несколько уточнить, обратившись к схеме удлиняющейся серии и учитывая примерный вид зависимости $V(m) = \omega_m(A)$ для редкого события A (см. рис. 2). Обозначим через s_k номер испытания,

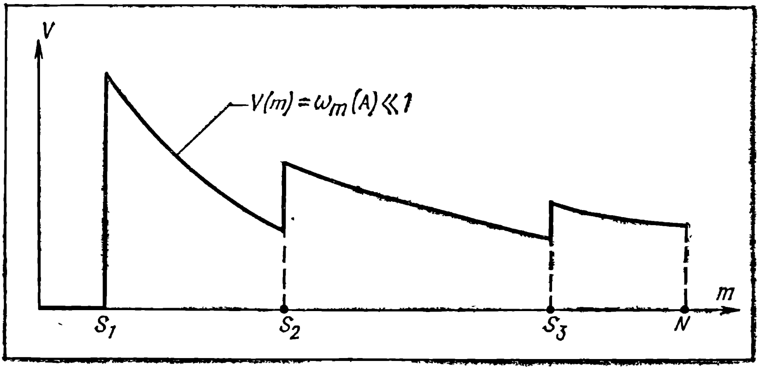


Рис. 2

в котором событие A наступило в данной серии испытаний $s=\overline{1,N}$ в k-й раз. При переходе от $m=s_k-1$ к $m=s_k$ частота меняется от значения $\omega_{s_k-1}(A)=(k-1)/(s_k-1)$ до значения $\omega_{s_k}(A)=k/s_k$, если считать, что событие A дважды подряд никогда не наступало. Относительный скачок частоты при таком переходе равен

$$\delta(k)=\frac{\omega_{s_k}(A)-\omega_{s_k-1}(A)}{\omega_{s_k}(A)}=\frac{s_k-k}{(s_k-1)k}.$$

Для редких событий $s_k \gg k$ и, стало быть, $\delta(k) \simeq 1/k$, так что только для $k>10$ скачки на графике $V(m)$ могут иметь относительную величину, меньшую, чем 10 %. Значит, только для $k>10$ средняя прямая линия $V=P(A)$ может аппроксимировать зависимость $V(m)$ с точностью порядка 5 %, довольно часто фигурирующей в прикладных расчетах. Мы приходим к оценке необходимого количества испытаний, уже полученной выше.

В качестве результатов расчета в теории надежности подчас выступают вероятности, отличающиеся от единицы лишь начиная с четвертого — шестого знаков после запятой. Измерение подобных вероятностей (порядка 10^{-4}—10^{-6}) требует проведения по меньшей мере 10^5—10^7 испытаний. Провести столь большое количество испытаний чаще всего невозможно. По этой простой причине расчеты, продуктом которых оказываются подобные вероятности, чаще всего приходится квалифицировать как совершенно недоступные для экспериментальной проверки.

Распределение вероятностей. Моменты являются наиболее часто измеряемыми усредненными характеристиками непредсказуемых величин. Однако во многих практических задачах недостаточно измерять и прогнозировать только моменты. Например, нередко требуется прогнозировать такой количественный показатель, как процентное содержание в партии деталей, у которых значение определенного параметра $X(s)$ (здесь s — номер детали) попадает в назначенный промежуток $[a, b]$. В подобных случаях, в сущности, требуется предвидеть, как в среднем будут распределены между возможными значениями величины $X(s)$ частоты реализации этих значений в серии предстоящих испытаний. Так и возникает понятие *распределения вероятностей*, или кратко — *распределения*.

В теоретических исследованиях и при вычислениях наиболее удобно задавать распределение величины $X(s)$ *функцией распределения*

$$F_x(x) = P(X(s) \leqslant x), \forall x.$$

Под знаком вероятности здесь выписано то неравенство, выполнение которого в испытании s означает наступление рассматриваемого события. Подобная запись применяется ниже и к частотам. Идеальная процедура измерения функции $F_x(x)$ выглядит следующим образом. Для ряда возрастающих значений m находят и сравнивают между собой эмпирические функции распределения

$$F_m(x) = \omega_m(X(s) \leqslant x), \forall x.$$

Если конфигурация ступенчатых кривых $F_m(x)$ с ростом m стабилизируется, то эти кривые приближенно оценивают для $m \gg 1$ кривой $F_x(x)$, которая может быть и ступенчатой, и непрерывной. В таком виде здесь реализуется эмпирическая индукция в форме схемы удлиняющейся серии. С точки зрения прикладника, кривая $F_x(x)$ — это просто-напросто линия регрессии, приближенно оценивающая устойчивую эмпирическую зависимость $F_m(x)$ для длинной серии проведенных, а главное — будущих испытаний. Подчеркнем, что при отрицательном ответе на вопрос об устойчивости функции $F_m(x)$ понятие распределения вероятностей оказывается неприменимым к данной непредсказуемой величине $X(s)$. С другой стороны, ничто в принципе не мешает измерять $F_x(x)$ и для неслучайной величины $X(s)$.

Зная функцию распределения, можно оценить вероятность попадания $X(s)$ в любой промежуток

$$P(a < X(s) \leqslant b) = F_x(b) - F_x(a), \forall b > a. \quad (4)$$

Формула (4) выражает, если можно так сказать, основное назначение функции распределения. Мы употребили слово «оценить» потому, что на практике речь идет все же о приближенных оценках — прогнозах. С позиций прикладника, запись равенства (4) как точного выглядит всего лишь общепринятой условностью.

Пользуясь случаем, заметим, что экспериментальная проверка любого равенства, записанного как точное (скажем, равенства, выражающего закон сохранения энергии), доказывает, строго говоря, лишь то, что оно выполняется в некотором приближении. В естественных науках, по сути дела, не ставят вопрос ребром — выполняется или не выполняется данный закон, а интересуются тем, с какой именно точностью он выполняется в эксперименте. Так, в настоящее время эксперимент позволяет ручаться за относительную точность выполнения закона сохранения энергии в ядерных реакциях, равную 10^{-6}, тогда как, допустим, законы Менделя выполняются в эксперименте гораздо менее точно (см., например, [7, 9, 10]).

Распределение вероятностей является самой полной прогнозируемой характеристикой, которая рассматривается в прикладной теории вероятностей. Зная распределение величины $X(s)$, можно, в частности, оценить любой ее момент. Например, для начальных моментов справедлива формула

$$[M[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)\, dx, \quad (5)$$

где под интегралом фигурирует *плотность распределения* $f_x(x) = dF_x(x)/dx$. Моменты $M[X^k]$, найденные по формуле (5), — это те самые моменты, которые получаются как результат действия оператора M прямо на последовательность $\{X^k(s)\}_1^m$. Вовсе не обязательно вводить моменты только формулами типа (5), т. е. через посредство распределений. На практике зачастую не располагают протоколом такой длины, чтобы можно было всерьез измерить распределение, и тогда поневоле ограничиваются измерением моментов. Так что фактически моменты часто выступают и в качестве самостоятельных усредненных характеристик, не связываемых в обязательном порядке с понятием распределения.

В литературе встречаются настоятельные рекомендации измерять именно функции распределения на том основании, что стабилизация функций $F_m(x)$ с ростом m всегда более заметна, нежели стабилизация гистограмм — эмпирических плотностей распределения. Между тем это отличие функций распределения от плотностей сродни преимуществу нечувствительного прибора, дающего малое рассеивание результатов измерений, перед прибором чувствительным, у которого рассеивание в тех же условиях значительно больше как раз из-за чувствительности.

Статистическая независимость. Некоррелированность. Величины $X_1(s), \ldots, X_n(s)$ называют статистически независимыми тогда и только тогда, когда справедливо тождество

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i), \ \forall x_1, \ldots, x_n. \tag{6}$$

В левой части здесь стоит совместная функция распределения данных величин, равная вероятности одновременного выполнения всех неравенств $X_i(s) \leqslant x_i$ для $i=\overline{1, n}$. В инженерной литературе такую функцию распределения называют n-мерной. Определение статистической независимости можно дать и на языке плотностей распределения. Под независимостью событий $A_1, \ldots, A_n$ подразумевают статистическую независимость их индикаторов $X_{A_1}(s), \ldots, X_{A_n}(s)$, функции распределения которых, естественно, можно рассматривать на общих основаниях. Правда, свойство независимости событий обычно формулируют на языке вероятностей, а не функций распределения.

Допущение о статистической независимости принимают весьма охотно, поскольку при этом совместная n-мерная функция распределения оказывается выраженной через одномерные функции распределения. Измерить же n одномерных функций распределения намного проще, чем измерить одну n-мерную. Однако не следует упускать из виду, что статистическая независимость, к сожалению, не вытекает с непреложностью из кажущейся, интуитивной независимости рассматриваемых величин. Здесь имеется полная аналогия с тем фактом, что из стабильности контролируемых условий эксперимента, вообще говоря, не вытекает статистическая устойчивость.

Для идеальной эмпирической проверки статистической независимости все-таки необходимо измерить n-мерную функцию распределения, что в соответствии с изложенной статистической трактовкой распределений требует исследования устойчивости n-мерной эмпирической функции распределения.

Таким образом, о статистической независимости можно говорить с полным основанием только *после того*, как установлена статистическая устойчивость.

При статистической трактовке функция распределения $F(x_1, \ldots, x_n)$ характеризует длинные протоколы

$$\{X_1(s)\}_1^m, \quad \ldots, \{X_n(s)\}_1^m; \qquad m \gg 1 \tag{7}$$

в целом. Соответственно к протоколам в целом относится и свойство (6), так что полностью лишено смысла говорить о статистической независимости величин в каком-либо отдельном их измерении. Точнее суть дела передавал бы термин «статистическая независимость протоколов». К нему мы и будем прибегать ниже в самые ответственные моменты изложения.

Более простым, нежели статистическая независимость, глобальным свойством протоколов (7) является (попарная) некоррелированность величин $X_1(s), \ldots, X_n(s)$, которая означает справедливость равенств

$$M[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j] = 0, \quad \forall i \neq j. \tag{8}$$

Основная задача прикладной теории вероятностей в принципе та же, что и любой другой математизированной естественнонаучной теории: по прогнозируемым эвристическим путем исходным величинам V вычислять некоторые вторичные величины W в отыскании оператора $W = \Phi(V)$ заключается собственно математическая часть теории. С точки зрения практики, вычисление вторичных величин W означает их теоретическое *прогнозирование*, осуществляемое с привлечением математики. Такое прогнозирование зачастую существенно экономнее прямого экспериментального исследования величин W. Ясно, что оно эффективно лишь тогда, когда оказывается достаточно удачным эвристический прогноз исходных величин V.

Подчеркнем, что прогноз исходных величин всегда является эвристическим, интуитивным. Ведь в любой теории неизбежны некие начальные посылки, которые попросту уже не из чего выводить формально по четким правилам логики (между прочим, это простое обстоятельство удивительно часто упускают из виду). В прикладных теориях начальные интуитивные посылки, принимаемые на основе анализа экспериментальных данных, образуют так называемый *эмпирический базис* теории. Природа вещей такова, что тщетно надеяться как-то вычислить или обосновать чисто математически достоверность этих базисных посылок. Самый надежный способ эвристического прогнозирования исходных величин, равно как и заключительной проверки теоретических прогнозов, доставляет неоднократно упоминавшаяся выше эмпирическая индукция. Математический аппарат прикладной теории выполняет функции своего рода надстройки над эмпирическим базисом, позволяя по исходным величинам вычислять величины вторичные. Естествоиспытатели издавна сравнивают математику с жерновами, перемалывающими то, что в них засыпают.

Вместе с тем математические понятия обычно участвуют и в описании эмпирического базиса теории. Математика, несомненно, является тем языком, без которого трудно подступиться хотя бы к постановке и обсуждению большинства современных практических задач, не говоря уже об их эффективном решении.

В прикладной теории вероятностей роль исходных прогнозируемых величин V играют такие усредненные характеристики исходных непредсказуемых величин $X(s)$, как моменты, вероятности, распределения. Вторичными же прогнозируемыми величинами W здесь являются аналогичные усредненные характеристики некоторых вторичных непредсказуемых величин $Y(s)$, связанных известным образом с величинами $X(s)$. Собственно математическая часть основной задачи прикладной теории вероятностей состоит в переходе от известного исходного оператора $Y=\varphi(X)$, связывающего непредсказуемые величины, к производному оператору $W=\varphi(V)$, связывающему величины, поддающиеся прогнозированию. Простым примером служит рассмотренный выше случай, когда исходный оператор представлял собой функцию $\varphi(X)=X^k$. Если $V=f_x(x)$, а $W=M[X^k]$, то производный оператор определяется равенством (5).

Предельные теоремы теории вероятностей решают более трудные варианты основной задачи теории вероятностей. Они рассматривают ансамбль исходных величин $X_1(s), \ldots, X_n(s)$ в предположении, что $n\to\infty$, почему теоремы и называют предельными. В качестве вторичной величины выступает, если отвлечься от деталей, сумма $Y_n(s)=X_1(s)+\ldots+X_n(s)$.

Относительно ансамбля исходных величин в центральной предельной теореме (ЦПТ) предполагают следующее:

1) величины $X_1(s)$, ..., $X_n(s)$ статистически независимы при любом n;

2) рассеивание всех этих величин возле своих математических ожиданий примерно одинаково.

Условия тех предельных теорем, за которыми закрепилось название «законы больших чисел» (ЗБЧ), в целом мягче. В них отсутствует требование 2, а также допускается заметное — с математической точки зрения — ослабление требования 1 вплоть до замены его требованием некоррелированности (8). При всем этом, с точки зрения прикладника, условия ЦПТ и ЗБЧ практически совпадают. На практике считают допустимым применять ЦПТ всякий раз, когда есть интуитивные основания применять ЗБЧ.

В заключении ЦПТ утверждается в общих чертах то, что при $n\to\infty$ распределение величины $\mathring{Y}_n(s)/\sqrt{n}$ неограниченно приближается к нормальному. Заключение ЗБЧ имеет аналогичный характер: утверждается, что при $n\to\infty$ распределение величины $\mathring{Y}_n(s)/n$ неограниченно приближается к вырожденному, т. е. к распределению постоянной величины (равной в данном случае нулю). С практической стороны ЦПТ полностью перекрывает законы больших чисел, доставляя количественные оценки там, где ЗБЧ в основном устанавливают лишь существование предела. В ходе доказательства законов больших чисел, надо сказать, тоже получаются количественные оценки с помощью неравенства Чебышева, но эти оценки намного грубее тех, что доставляются центральной предельной теоремой. Применять неравенство Чебышева в практических расчетах нецелесообразно.

Итак, с принципиальной стороны предельные теоремы решают ничем особенным не выделяющиеся разновидности основной задачи теории вероятностей. В начальный период развития теории вероятностей принципиальное значение предельных теорем сильно преувеличивали, что обусловливалось не совсем логичной их интерпретацией. Подобные преувеличения не до конца изжиты и поныне: нет-нет да и встречаются в современной литературе утверждения, что статистическая устойчивость имеет место в силу ЗБЧ (ослабленный вариант — в соответствии с ЗБЧ). Чтобы облегчить обсуждение данного примечательного обстоятельства в главе 3, сформулируем сейчас частный случай ЗБЧ — теорему Бернулли, по возможности не прибегая к эмпирическим терминам. Для удобства ссылок назовем нашу формулировку теоремой 1.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие два условия:

1) математические ожидания двоичных величин $X_{A_1}(s)$, ..., $X_{A_n}(s)$ одинаковы: $M\,[X_{A_i}]=p,\ \forall i$;

2) величины $X_{A_1}(s)$, ..., $X_{A_n}(s)$ статистически независимы при любом n.

Тогда справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\,Y_n(s)-p\right|\leqslant\varepsilon\right)=1,\ \forall\varepsilon>0,$$

где $Y_n(s)=X_1(s)+\ldots+X_n(s)$.

Иногда математические ожидания $M\,[X_A]$ называют здесь *продольными средними* рассматриваемого ансамбля величин, а функцию $Y_n(s)/n$ — его *поперечным средним*. Теоремы, устанавливающие в том или ином смысле близость между продольными и поперечными средними, называют *эргодическими*. Теорема 1 — простейшая эргодическая теорема.

Мизесовский подход. До сих пор мы рассматривали теоретико-вероятностные понятия лишь нестрого — с прагматических позиций прикладника. К строгому построению математического аппарата теории вероятностей подходят по-разному. При мизесовском подходе не стесняются выбирать исходные понятия математической теории предельно близкими к тому, с чем имеют дело в эксперименте. Исходные математические понятия здесь, собственно, совпадают с рассмотренными выше понятиями протокола $\{X\,(s)\}_1^m$, эмпирического среднего $M_m[X]$, частоты $\omega_m(A)$, эмпирической функции распределения $F_m(x)$. Правда, в математическом контексте протокол называют конечной числовой последовательностью, а под эмпирическими подразумевают такие усредненные характеристики, которые вычислены именно для конечной последовательности.

Словом, все начинается здесь с рассмотрения вещественных функций $X\,(s)$ вещественного аргумента $s=1,\ 2,\ \ldots$ и с отказа выбирать в качестве «теоретического двойника» случайной физической величины какие-либо более абстрактные функции. Происходит, так сказать, арифметизация теории вероятностей. Об этой главной черте мизесовского подхода к математическому оформлению теории вероятностей порою отзываются неодобрительно как об излишнем натурализме. С таким же успехом можно попрекать теоретическую механику тем, что она выбирает в качестве исходного объекта изучения функции вещественного аргумента t.

Мизесовским «теоретическим двойником» допущения о должной устойчивости эмпирического среднего является постулат о существовании предела

$$M[X]=\lim_{m\to\infty} M_m[X] \tag{9}$$

для идеализированного протокола — бесконечной числовой последовательности $\{X(s)\}_1^\infty$. Равенством (9) математическое ожидание вводится уже как четкое математическое понятие в стиле традиционной неконечной математики, систематически применяющейся в естественных науках со времен Ньютона и Лейбница. В этом равенстве прямо, хотя и схематично, отражена в математических понятиях эмпирико-индуктивная схема удлиняющейся серии.

Мизесовское определение (9) понятия математического ожидания критиковали как неприменимое к объективной реальности, данной нам в эксперименте, на том основании, что количество испытаний на практике всегда ограничено. Подобная критика в равной мере относится ко всем применениям понятия предела в естественных науках, например, к понятию мгновенной скорости в механике.

Ответ на такую поверхностную критику давался не раз. Разумеется, перейти к пределу в эксперименте невозможно. С точки зрения прикладника, предельный переход — это удобный иероглиф, хорошо отражающий идею (но не более) реальных процедур измерения и прогнозирования, о которых прикладнику всегда приходится помнить. Можно сказать, что предельный переход дает весьма схематичное описание этих процедур, удобное прежде всего для построения строгих и одновременно достаточно простых математических теорий. Без предельных переходов многие строгие теории из числа ориентированных на приложения уподобились бы геометрии точек конечных диаметров и прямых линий конечных толщин, которую пробовали строить, но оставили, как неудобную в обращении.

Частным случаем постулата (9) является мизесовское определение вероятности как предела частоты. Соответственно, функции распределения вероятностей вводятся в строгой мизесовской теории равенствами типа

$$F_x(x) = \lim_{m\to\infty} F_m(x), \tag{10}$$

где сходимость может пониматься в смысле разных метрик.

Таким образом, объектом изучения мизесовской теории вероятностей оказываются бесконечные числовые последовательности $\{X(s)\}_1^\infty$ — в частности, двоичные последовательности $\{X_A(s)\}_1^\infty$, — для которых постулировано существование пределов вида (9), (10). При этом вовсе не предписывается вводить в обязательном порядке распределения. Можно ограничиваться рассмотрением моментов, т. е. постулатами типа (9).

Подчеркнем, что здесь имеют дело с самыми обычными числовыми последовательностями, для которых постулируются вполне определенные математические свойства. Категория случайности — в смысле непредсказуемости — формально не имеет никакой связи с этими последовательностями и свойствами. Другими словами, математический аппарат мизесовской теории вероятностей, впрочем, как и всех иных вариантов данной теории (об этом уже говорилось выше), не имеет ни малейшего формально-логического отношения к непредсказуемости — это самая обычная математика. Особенность рассматриваемого нами теоретико-вероятностного изучения числовых последовательностей заключается в том, что здесь в конечном счете принимают во внимание *только те* их свойства, которые задаются постулатами типа (9), (10).

Так, статистическая независимость (6) в мизесовской теории вероятностей — это глобальное свойство функций $X_1(s), \ldots, X_n(s)$, заданных на множестве натуральных чисел. Как таковое, оно сходно со всеми другими глобальными свойствами функций, например с их ортогональностью или линейной независимостью. Более точно суть дела передавало бы здесь выражение «статистическая независимость *последовательностей*», эмпирический аналог которого мы использовали, когда говорили о статистической независимости протоколов (7). Кстати, некоррелированность (8) представляет собой не что иное, как *ортогональность счетномерных векторов* — последовательностей $\{\mathring{X}_1(s)\}_1^\infty, \ldots, \{\mathring{X}_n(s)\}_1^\infty$.

Выше отмечалось, что даже с точки зрения прикладника понятие математического ожидания и производные от него понятия вероятности и распределения вероятностей отнюдь не намертво связаны с категорией случайности. Названные усредненные характеристики в принципе возможно — а кое-когда и практически целесообразно — измерять и для предсказуемых величин. Так что введение этих усредненных характеристик для обычных числовых последовательностей ни с какой стороны не выглядит экстравагантным.

Мы заостряем внимание на такого рода вопросах с целью лишний раз напомнить, что любая прикладная теория расчленяется на два различных по своему характеру блока: математический аппарат и интерпретацию этого аппарата. Данные блоки как раз и сравнивают с жерновами и засыпкой. Для успешного применения прикладной теории необходимо отчетливо разграничивать эти блоки. В противном случае будет непонятно, за что в выводах теории отвечает математический аппарат с его высокой четкостью, а что порождено гораздо более расплывчатыми правилами интерпретации.

Прикладник должен достаточно ясно представить себе, что именно доказано в теоремах, входящих в математический блок теории, а затем лично провести интерпретацию их условий и заключений, никому не передоверяя эту работу. В то же время доказательства теорем можно полностью отнести к компетенции математиков, следуя идее разделения труда. Все это справедливо и для прикладной теории вероятностей.

Думается, что различать, где в прикладной теории вероятностей жернова, а где засыпка, было бы намного легче, если бы при изложении математического блока этой теории избегали терминов «испытание», «событие» и «случайная величина», явно перегруженных ассоциациями, и вообще старались бы не упоминать о случайности. В математическом тексте, по-видимому, лучше не упоминать и о некоррелированности: корректнее говорить об ортогональности. Математические результаты всегда желательно формулировать на нейтральном для прикладника языке с тем, чтобы не навязывать заранее интерпретаций. К примеру, математический анализ даже в руководствах для прикладников излагают с применением математических терминов «производная» и «интеграл», а не говорят исключительно о скоростях, теплоемкостях, площадях и т. п. Компетенция математиков по части интерпретаций примерно столь же ограничена, как и компетенция прикладников в вопросах строгой математики.

Повторим, что прикладник может вполне осознанно интерпретировать теоремы, по-видимому, только при ясном понимании их основного чисто математического содержания. Достигнуть такового понимания нужных для практики теоретико-вероятностных теорем в общем-то не труднее, чем разобраться в теоремах из втузовского курса анализа. Например, в сформулированной выше теореме 1 с математической точки зрения имеют дело, конечно же, не со случайными величинами или событиями, а с ансамблем статистически независимых двоичных последовательностей (будучи стеснены предшествующим контекстом, мы остановились в теореме 1 на термине «двоичные величины», опустив, однако, эпитет «случайные»). В логичной интерпретации двоичные последовательности — это протоколы-индикаторы набора $A_1, \ldots, A_n$ независимых и равновероятных событий. Величина $Y_n(s)$ — это количество всех тех событий из указанного набора, которые наступили в испытании s, а вторичная вероятность P в заключении теоремы 1 оказывается при такой трактовке самой обычной статистической вероятностью. Таким образом, в логичной интерпретации теорема 1 непосредственно относится к некоторому *набору* исходных событий $A_1, \ldots, A_n$, а не к одному событию A.

Отметим, что условие 2 в теореме 1 можно заменить некоррелированностью двоичных величин, т. е. ортогональностью последовательностей $\{\mathring{X}_{A_1}(s)\}_1^\infty, \ldots, \{\mathring{X}_{A_n}(s)\}_1^\infty$. С математической стороны, теорема Бернулли и другие формы ЗБЧ, например, теорема Чебышева в своих сильных вариантах представляют собой не что иное, как теоремы об ортогональных функциях. Таковыми они, вероятно, и должны с самого начала преподноситься прикладникам. По нашим наблюдениям, «выудить» это математическое содержание ЗБЧ из стандартных руководств по теории вероятностей, стремящихся оперировать исключительно эмпирическими терминами, представляется для прикладников (притом не только для начинающих) довольно сложным делом. Неясность же в этом вопросе поддерживает застарелые иллюзии насчет большого принципиального и практического значения ЗБЧ.

Резюмируем. С точки зрения прикладника, предельные переходы не являются слишком уж важной чертой мизесовского подхода, а представляют собой средство и, если угодно, издержки строгой формализации. Главная черта мизесовского подхода состоит в том, что здесь с самого начала берут все так, как оно есть на самом деле в эксперименте. Неудивительно, что в инженерной и физической литературе вводят математическое ожидание равенством (9) нередко без ссылок на Р. Мизеса. Мизесовский подход лишь предоставляет, так сказать, права гражданства в теории вероятностей тем давным-давно известным эмпирико-индуктивным схемам обработки данных, которые восходят к самим основам естественнонаучного метода с его требованием многократного воспроизведения результата.

Сравнение с аксиоматикой Колмогорова. В этой широко известной аксиоматике теории вероятностей в качестве «теоретического двойника» случайной величины выбирается измеримая функция $X(\omega)$, заданная на абстрактном вероятностном пространстве Ω. Мизесовский подход, скорее всего, не может быть полностью уложен в рамки аксиоматики Колмогорова, так как точку ω практически невозможно отождествить с номером s испытания, если s пробегает счетное множество значений. Невозможность обусловлена свойствами понятия меры.

Основная теоретическая проблема в мизесовском подходе состоит, по-видимому, в том, чтобы найти конструктивные теоремы существования числовых последовательностей $\{X(s)\}_1^\infty$, для которых имеет место нужная сходимость (10) к наперед заданной функции распределения. Эта проблема пока решается только для слабой сходимости [22]. В аксиоматике Колмогорова имеется следующая теорема существования: для любого согласованного семейства функций распределения существует вероятностное пространство Ω и набор функций $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$,..., $\omega\in\Omega$, для которых семейство функций распределения совпадает с заданным согласованным семейством. Данная теорема не решает вышеуказанной теоретической проблемы хотя бы потому, что пространство Ω непохоже на множество натуральных чисел $s=1,2, \ldots$

Мизесовский подход нуждается в особой разработке теоретико-числовыми методами, не свойственными аксиоматике Колмогорова. Высказывалось мнение, что этот подход страдает органической нестрогостью. Между тем это не так, о чем свидетельствуют, в частности, упомянутые теоремы существования [22]. При желании можно вполне строго оформить основы мизесовского подхода и в виде четкого свода аксиом. Противопоставление мизесовского подхода аксиоматическому методу в теории вероятностей целиком основано на недоразумении.

Подведем итоги. Выше отстаивалась следующая точка зрения. В каждой практической задаче, к решению которой всерьез привлекают теорию вероятностей, имеется свой набор исходных величин, *многократно измеряемых в эксперименте*; непредсказуемость этих величин не является ни достаточным, ни необходимым условием применимости к ним теоретико-вероятностных понятий. Действительно необходимым условием эффективного применения теории вероятностей является статистическая устойчивость, т. е. устойчивость усредненных характеристик исходных величин. Теория вероятностей позволяет рассчитать по этим исходным усредненным характеристикам аналогичные характеристики других, вторичных величин, если известен оператор, связывающий вторичные величины с исходными. При этом гарантируется, что рассчитанные — разумеется, без ошибок — вторичные усредненные характеристики будут устойчивы в нужной степени, если достаточно устойчивы исходные усредненные характеристики. Однако теория вероятностей не может дать никаких гарантий относительно исходной статистической устойчивости. Полных гарантий здесь вообще дать нельзя, так как на практике речь идет о *прогнозах*. Можно лишь утверждать, что допущения-прогнозы об устойчивости оправдываются чаще, когда они принимаются на основе эмпирической индукции.

Далее, при проведении теоретико-вероятностных расчетов часто принимают допущение о статистической независимости длинных протоколов. Согласно определению (6) о статистической независимости можно говорить только *после того*, как принято допущение о должной статистической устойчивости (точнее, об устойчивости n-мерной эмпирической функции распределения).

Таковы логика введения и соотношение двух наиболее фундаментальных концепций прикладной теории вероятностей — концепций статистической устойчивости результатов измерений и статистической независимости протоколов измерений.

При введении этих фундаментальных концепций нам так и не представился случай официально привлечь к делу понятие независимости испытаний, являющееся между тем одним из основных понятий математической статистики. Был разговор об однородности испытаний, т. е. стабильности контролируемых условий эксперимента U, но в формулы, с участием которых вводились обе фундаментальные концепции, условия U не вошли. Видимо, нельзя и надеяться на введение условий U в количественные понятия, формулы и предложения теории вероятностей, как бы она ни строилась. Слишком разнообразны эти условия в разных приложениях теории вероятностей, и подчас они очень сложны. Самым подробным отчетом о проведенной серии испытаний, который под силу «переваривать» теории вероятностей, является предельно лаконичный протокол, где от каждого испытания остались лишь его номер s да результат измерения. Для того чтобы сформулировать определение независимости испытаний, апеллирующее только к такому протоколу, необходимы какие-то нетривиальные идеи. Ниже мы коснемся этих идей, отсутствовавших в классической теории вероятностей и составляющих «высший слой» мизесовского подхода.

Выходит, понятия статистической устойчивости и статистической независимости величин не нуждаются для своего введения в понятии независимости испытаний. Наоборот, последнее понятие каким-то образом должно вводиться на их основе.

Глава 3. КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Определения того, что понимают под математической статистикой (МС), разноречивы, в чем легко убедиться, просмотрев почтенных размеров коллекцию [23]. Вот одно из обычных определений: «Математическая статистика — наука, исследующая количественные соотношения массовых явлений. При этом к области математической статистики относятся те количественные соотношения, которые отражают специфические черты этих явлений как массовых. Математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей, предельные теоремы которой — закон больших чисел и другие — образуют теоретическую основу решения многих ее вопросов. Методы математической статистики универсальны и приложимы к самым различным областям знания: общественной, экономической, технической, биологической и т. д.»

В первой же фразе процитированного определения и во всей книге [24], из которой оно взято, а также в ряде других руководств видна тенденция отождествлять МС с любыми приложениями математических символов и понятий к статистике. К тому располагает сам термин «математическая статистика» наподобие того, как располагают к чересчур широким толкованиям упомянутые выше термины «теория игр» и «планирование эксперимента».

В настоящей брошюре МС трактуется более узко. Сопоставив между собой разные руководства по этой дисциплине, можно выявить не только отличия, но и более или менее определенное смысловое ядро, общее для большинства руководств. Мы подразумеваем под МС именно такое ядро, поскольку, надо полагать, в нем и сосредоточены наиболее характерные черты метода МС. Кстати, с этих позиций книга [24] — за вычетом процитированного нами определения — как раз представляется руководством не по МС, а просто по статистике, хотя она и опубликована в серии «Математическая статистика для экономистов». В [24] обстоятельно рассказано о понятиях статистики, т. е. о всякого рода усредненных характеристиках, против использования которых вряд ли уместно выдвигать какие-либо общие принципиальные возражения. В главе 2 мы тоже рассказывали о том, что понятия статистики служат прообразом и «метрологически обеспеченной» интерпретацией теоретико-вероятностных понятий. Ясно, что практическую полезность теории вероятностей также вряд ли уместно отвергать в принципе.

Ниже критикуется только специфическая манера использования теории вероятностей, характерная для МС. Истоки этой манеры охарактеризованы в третьей фразе процитированного нами определения МС — это законы больших чисел, а точнее, их исторически первые интерпретации, на удивление прочно вошедшие в традицию.

А л ь т е р н а т и в а о б щ е й у с т а н о в к е м а т е м а т и ч е с к о й с т а т и с т и к и. Во всех руководствах по МС, а не только в процитированном выше определении, сквозит следующая общая установка — дать универсальную теорию измерения усредненных характеристик. От этой теории надеются получить ответ на вопрос, достаточна ли проведенная серия испытаний для измерения нужной усредненной характеристики с требуемыми точностью и надежностью. Последний вопрос короче формулируют так: представительна ли имеющаяся выборка? На этом пути МС развилась в обширную и изрядно сложную дисциплину.

Между тем простые соображения естественнонаучного здравого смысла, изложенные нами в главе 2, заставляют сомневаться в самой возможности построения такого рода универсальной и сложной теории, которая в самом деле оказалась бы очень полезной. Дело в том, что едва ли возможно как-то всерьез «вычислить» или «обосновать математически» точность и надежность *начальных* посылок какого бы то ни было прикладного расчета. На практике начальные посылки — засыпка в жернова математики — всегда являются по необходимости *интуитивными прогнозами* неких перманентностей. В естественных науках издавна принято подтверждать перманентности не сложными теоретическими построениями и выкладками, а убедительной демонстрацией многократно воспроизведенных результатов эксперимента, т. е. эмпирической индукцией.

Таким образом, альтернатива общей установке МС состоит в том, чтобы в прикладных задачах всемерно воздерживаться от теоретизирования на этапе принятия начальных посылок-прогнозов, концентрируя усилия на эмпирико-индуктивном обосновании правдоподобности этих прогнозов. Сколько-нибудь сложная математическая оснастка бывает полезна в статистических задачах разве что потом — на этапе вычисления вторичных усредненных характеристик по уже надежно спрогнозированным исходным характеристикам.

Усомнившись в реалистичности общей установки МС, мы можем ожидать, что анализ логической структуры и практического содержания типичных понятий и утверждений этой дисциплины выявит в них уязвимые места. Наш анализ будет касаться не математических тонкостей, а лишь кардинального для практики вопроса: каким образом надо ставить эксперимент для верификации, т. е. проверки соответствия типичных утверждений МС объективной реальности? Объявить эти утверждения не подлежащим «примерке» хотя бы к мысленному эксперименту значило бы исключить их из компетенции естественных наук. Мы приступаем к примерке, оставаясь на тех же метрологически жестких позициях, которые были заняты нами с самого начала: любое математическое ожидание, в частности любая вероятность, трактуется статистически. Начнем с разбора истоков МС.

Традиционные интерпретации предельных теорем. Возьмем в качестве примера традиционную формулировку теоремы Бернулли. Для удобства ссылок назовем эту формулировку теоремой 2. Рекомендуем сразу же сравнить теорему 2 с теоремой 1.

Теорема 2. Пусть проводится n испытаний, в каждом из которых может наступить или не наступить некоторое событие A, и пусть Y_n— количество наступлений события A в этой серии испытаний. Пусть, далее, выполнены следующие два условия:

1) вероятность $P(A)$ события A в каждом испытании равна p;

2) испытания независимы.

Тогда для вероятности

$$P(n, \varepsilon)=P(|\omega_n(A)-p|\leqslant\varepsilon) \tag{11}$$

того, что частота $\omega_n(A)=Y_n/n$ отклонится от p не более, чем на ε, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} P(n, \varepsilon)=1, \quad \forall\varepsilon>0. \tag{12}$$

В теореме 2 говорят об *одном* многократно наблюдаемом событии A и, следовательно, с математической точки зрения — об *одной* двоичной последовательности $\{X_A(s)\}_1^\infty$ — идеализированном протоколе-индикаторе этого события (если, конечно, слова «испытание» и «событие» понимают в буквальном, обыденном смысле). Этим теорема 2 заметно отличается от теоремы 1, где фигурирует *ансамбль* двоичных последовательностей, или в интерпретации — *набор* событий $A_1, \ldots, A_n$.

В теореме 2 налицо две фундаментальные концепции МС — независимость испытаний и сходимость по вероятности частоты $\omega_n(A)$ к вероятности $P(A)$. Обсудим традиционные разъяснения этих концепций.

Независимость испытаний. В МС испытания иногда называют независимыми, если стабильны условия эксперимента. Выше отмечалось, что стабильность контролируемых условий эксперимента U не всегда обеспечивает саму применимость теории вероятностей и что условия U вообще не могут входить в количественные понятия, формулы и предложения теории вероятностей, как бы она ни строилась.

Менее легковесные определения, даваемые здесь МС, сводят независимость n испытаний к статистической независимости n величин. Это, безусловно, необходимо сделать, если стремиться представить теорему 2 в качестве одной из интерпретаций теоремы 1. В МС такое сведение считают тривиальной задачей, которая сразу решается, если положить, что каждое испытание порождает случайную величину (см., например, [25]). Тогда n испытаний породят n случайных величин, и статистическая независимость последних будет означать независимость n испытаний.

Однако каждое отдельное испытание s, понимаемое как измерение величины X, порождает все же не случайную величину, а только одну ее реализацию — *число* $X(s)$. В роли случайной величины, точнее, объекта, к которому применимы понятия математического ожидания или вероятности, выступает при статистическом подходе весь длинный протокол измерений $\{X(s)\}_1^m$, т. е. числовая последовательность как единое целое. Так, в теореме 2 все испытания порождают *всего одну* двоичную случайную величину.

Если позволительно так выразиться, волюнтаризм соответствия «n испытаний — n случайных величин» в конечном счете оборачивается отсутствием в МС ясных правил для эмпирической проверки независимости испытаний в ситуации, когда сначала располагают *одним* протоколом, скажем, одним протоколом-индикатором $\{X_A(s)\}_1^\infty$, как в теореме 2. Неясно, какому правилу надо следовать, чтобы перейти от одного исходного протокола к ансамблю

$$\{X_{jn}(r)\}_1^\infty,\ j=\overline{1,n},\ \forall n \tag{13}$$

из n протоколов с тем, чтобы проверить их статистическую независимость, руководствуясь определением (6), и таким способом действительно проверить независимость n испытаний.

Итак, можно утверждать, что соответствие «n испытаний — n случайных величин» представляет собой в МС не что иное, как *домысливание ансамбля* случайных величин там, где сначала ведут речь об *одной* случайной величине, а главное, на самом деле имеют в эксперименте только одну случайную величину. Подобное домысливание — одна из характерных черт метода МС. Таким силовым приемом, конечно, удается свести на словах теорему 2 к схеме, по которой построена теорема 1. Но в результате остаются по существу неясными не только *условия* традиционных формулировок предельных теорем, где непременно фигурируют независимые испытания (измерения, опыты), но и их заключения, поскольку и для последних не предлагают ясных правил эмпирической проверки; в традиционных комментариях к законам больших чисел нет достаточно четких разъяснений и того, что представляет собой сходимость по вероятности.

С х о д и м о с т ь п о в е р о я т н о с т и. Обратимся к заключению теоремы 2. Для того, чтобы проверить в эксперименте наличие сходимости (12), нужно измерить вторичную вероятность $P(n, \varepsilon)$. Значит, нужно организовать длинную серию вторичных испытаний, каждое из которых состояло бы в проверке выполнения неравенства типа того, что довольно условно указано под знаком вероятности в формуле (11). Для этого необходимо иметь не *одну* серию-выборку, состоящую из n испытаний, как это может показаться при чтении формулировки теоремы 2, а *много* выборок по n испытаний. Обозначим эти выборки, точнее их протоколы, через $S(r, n)$, $r=\overline{1, Q}$, где r — номер выборки. Пусть $Y_n(r)$ — количество наступлений события A, а $\omega_{rn}(A)=Y_n(r)/n$ — их частота в выборке $S(r, n)$. Назовем процедуру формирования многих выборок *схемой многих серий*, тогда как рассмотренные в главе 2 схемы удлиняющейся и фиксированной серии станем называть для контраста *схемой одной* (удлиняющейся или фиксированной) *серии*.

Подсчитав обычным образом для серии $r=\overline{1, Q}$ вторичных испытаний частоту

$$\omega_Q(n, \varepsilon)=\omega_Q(\,|\omega_{rn}(A)-p|\leqslant\varepsilon), \tag{14}$$

можно в самом деле измерить вероятность $P(n, \varepsilon)$, руководствуясь в идеале схемой одной удлиняющейся серии. Такое измерение схематически формализуется по Мизесу как предельный переход

$$P(n, \varepsilon)=\lim_{Q\to\infty}\omega_Q(n, \varepsilon). \tag{15}$$

Перечитав теорему 1, можно видеть, что теорема 2 в существенных чертах сводится к ней, если выборка $S(r, n)$ представляет собой поперечное сечение ансамбля (13):

$$S(r, n)=\{X_{jn}(r)\,|\,j=\overline{1, n}\},$$

$$Y_n(r)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{jn}(r).$$

Вот и получается, что правил для формирования выборок из одной исходной последовательности $\{X_A(s)\}_1^\infty$ в МС не дают, коль скоро не дают правил для формирования ансамбля (13). Этот ансамбль, а с ним и выборки $S(r, n)$ в МС попросту домысливают. Можно считать и так: здесь домысливают много выборок $S(r, n)$, таких, что после объединения чисел $X_{jn}(r)$, стоящих в выборках на j-х местах, в последовательности $\{X_{jn}(r) \mid r=1,2, \ldots\}$ получается статистически независимый ансамбль (13). В МС вообще по возможности абстрагируются от того факта, что для верификации сходимости по вероятности необходимо проводить эксперимент по схеме *многих* серий. Даже грамматически все традиционные формулировки законов больших чисел, как и формулировка теоремы 2, построены так, будто дело касается только *одной* серии из n испытаний. Соответственно в МС никогда не выписывают аргумент r вторичных случайных величин типа $Y_n(r)$ или $\omega_{rn}(A)$ (сравните традиционную запись (11) — в этом смысле довольно условную — с нашей «неиносказательной» записью (14).

Две конкурирующие математические модели статистической устойчивости. Таким образом, в традиционных формулировках предельных теорем и в комментариях к ним нет ясных правил для верификации ни условий, ни заключений этих теорем. Именно это и породило в свое время иллюзию того, что законы больших чисел решают не ординарный вариант основной математической задачи теории вероятностей, а теоретически выводят устойчивость средних из однородности испытаний. От подобной иллюзии окончательно не отмежевались и современные руководства по теории вероятностей и МС; подборку соответствующих выдержек можно найти в публикациях автора [9, 13].

Данное обстоятельство находит отражение, в частности, в том, что статистическую устойчивость в МС отождествляют со сходимостью по вероятности, фигурирующей в заключениях законов больших чисел. Так, устойчивость частоты события A в МС отождествляют со сходимостью (12), а о мизесовской модели устойчивости

$$P(A)=\lim_{m\to\infty} \omega_m(A) \tag{16}$$

обычно не упоминают.

Между тем тесно связанные между собой сходимость по вероятности и схема многих серий в принципе неспособны дать завершенное описание феномена статистической устойчивости. В них налицо логическое зацикливание, являющееся еще одной характерной чертой метода МС. Зацикливание состоит в следующем.

Измерение первичной вероятности $P(A)$ по схеме многих серий заключается в таком оценивании близости первичных выборочных частот $\omega_{rn}(A)$ к определенной константе, которое предполагает измерение вторичиной вероятности $P(n, \varepsilon)$. Последнее же, в свою очередь, состоит в оценивании того, насколько близки к определенной константе вторичные частоты $\omega_Q(n, \varepsilon)$. Следовательно, мы приходим в принципе к такой же задаче, с какой начинали, только теперь все будет технически значительно труднее, так как вторичные испытания r намного сложнее первичных испытаний s. Назовем это обстоятельство первым парадоксом математической статистики.

Если, проявляя упорство, подвергнуть вторичные частоты точно такому же рассмотрению, как и первичные, то придем к вероятности того, что вторичные частоты отличаются от вторичной константы-вероятности $P(n, \varepsilon)$ менее, чем на ε_1. То есть мы придем уже к серии серий серий испытаний. И так далее. В популярной статье [26] А. Н. Колмогоров по этому поводу заметил: «При желании такое рассуждение можно повторять неограниченное число раз, но вполне понятно, что это не позволит нам совсем освободиться от необходимости на последнем этапе обратиться к вероятностям в примитивном, грубом понимании этого термина».

Другими словами, вполне понятно, что на практике нет иного выхода, кроме как разорвать логическое зацикливание схемы многих серий, обратившись к схеме одной серии, т. е. к мизесовской модели устойчивости частот. В отличие от (12) под знаком предела в (15) или (16) нет каких бы то ни было вероятностей. Если хотите, мизесовское определение вероятности как раз и есть обращение к вероятностям в примитивном, грубом понимании этого термина.

По здравому смыслу, разрыв логического зацикливания, названный А. Н. Колмогоровым «последним этапом», необходимо произвести так, чтобы вероятности самого высокого ранга, фигурирующие в математической модели данного конкретного эксперимента, в самом деле измерялись бы в этом эксперименте; по-видимому, трудно оправдать домысливание вероятностей хотя бы одного лишнего ранга.

Тем не менее такое домысливание составляет одну из основ метода МС, и к этому мы еще раз вернемся. Обратим сейчас внимание на следующие три факта:

1) Как в мизесовском определении (16), так и в определении (12) сходимости по вероятности участвуют предельные переходы. Однако сторонники МС обычно подчеркивают лишь трудности, возникающие при физической ин-

терпретации мизесовского (между прочим, более простого) предельного перехода.

2) Согласно формуле (14), вторичные частоты и вероятности можно найти только после того, как измерена первичная вероятность $p=P(A)$; назовем это обстоятельство вторым парадоксом МС. Для измерения $P(A)$ теперь уж с полной очевидностью виден единственный путь — обращение к схеме одной серии, т. е. к мизесовскому определению вероятности. Следовательно, к этому поистине неизбежному определению пришлось бы обращаться при реальном измерении вторичной вероятности $P(n, \varepsilon)$ даже дважды.

3) Логическое зацикливание в схеме многих серий совершенно не зависит от истолкования понятия независимости испытаний. Внесение в это истолкование ясности, отсутствующей в МС, не в состоянии исправить структурный недостаток схемы многих серий, заключающийся в переходе от первичных вероятностей к более сложным вторичным вероятностям.

Из традиционных формулировок законов больших чисел МС заимствовала не только модель статистической устойчивости, но и наиболее характерные черты всего метода в целом. Мы их, собственно, уже рассмотрели при анализе теоремы 2. Теперь «пройдемся» по ним специально, подразделив обсуждение — несколько условно — на пункты 1° — 3°.

1°. Постулат о существовании распределения вероятностей для исходных случайных величин. В условия теоремы 2 входит допущение о существовании вероятности события A (пусть в не совсем понятном смысле). Аналогично во всей МС начинают, как правило, с того, что постулируют существование, а то и конкретный вид распределения вероятностей для рассматриваемых непредсказуемых величин. Отсюда выражения: «Рассмотрим выборку из распределения $F_X(x)$». Затем ставят задачу *оценивания* функции плотности или параметров «объективно существующего» распределения вероятностей. Эта задача послужила и служит поводом для разработки довольно внушительного математического аппарата.

По такой схеме построена теория оценок Р. Фишера, о которой, например, в руководстве [25] для экономистов сказано: «Именно теория оценок позволяет научно подойти к обработке выборочных статистических наблюдений и применить в каждом конкретном случае тот метод, который дает возможность извлечь из выборочных данных максимум нужной информации и обеспечить наиболее точные и надежные выводы о свойствах генеральной совокупности». Так построены, в частности, метод максимального правдоподобия, теория доверительных интервалов, теория порядковых статистик и многочисленные более специальные концепции (например, теория дуального управления в автоматических системах).

В результате в МС, образно говоря, на большой скорости проходят мимо самого трудного и интересного места — эмпирического исследования статистической устойчивости. Вопрос о том, применимо ли к данной конкретной непредсказуемой величине понятие распределения вероятностей или хотя бы понятие математического ожидания, как бы и не ставится.

Альтернативу — более осторожный подход, при котором внимание перво-наперво сосредоточивается на эмпирико-индуктивном обосновании прогноза о статистической устойчивости, — мы обрисовали в главе 2.

Приведем в этой связи критическое замечание из статьи [2] по поводу вычисления доверительного интервала при малом числе опытов: «Для этого (вычисления. — *Ю. А.*) разработан довольно тонкий аппарат, основанный на допущении, что нам известен закон распределения случайной величины (нормальный). И опять возникает вопрос: а откуда, собственно, это известно? И с какой точностью? И какова, наконец, практическая ценность самого «продукта» — доверительного интервала? Мало опытов — значит, мало информации, и дело наше плохо. А будет ли при этом доверительный интервал немного больше или меньше, не так уж важно, тем более, что и доверительная вероятность назначена произвольно».

С наших позиций такое замечание представляется еще относительно мягкой формой сомнений. Можно добавить: откуда и насколько точно известно, что в данной конкретной ситуации вообще уместно говорить о распределении вероятностей? Последний вопрос представляется излишней осторожностью разве что в фундаментальных разделах статистической физики, где рассматриваются колоссальные коллективы частиц и огромные количества сравнительно простых актов взаимодействия между частицами. Стабильность объекта изучения там несравненно выше, чем, скажем, в технике или экономике. И там для проверки следствий из принимаемых гипотез можно поставить эксперимент достаточной чистоты, точности и повторяемости, а строго говоря, лишь это делает позволительным введение в гипотезы таких понятий, которые сами далеки от реального эксперимента.

Допустим все же, что распределение вероятностей рассматриваемых непредсказуемых величин существует. Но и тогда, следуя [2], можно не разделять высокого мнения о теории оценок, выраженного в нашей цитате из [25]. Ведь теория оценок позволяет извлечь максимум информации не просто из выборочных данных, как это может показаться, скажем, при чтении [25]. Принимается еще постулат о виде распределения вероятностей. Этот постулат отражает реальность лишь с какой-то точностью, на эмпирическую оценку которой теория оценок отнюдь не нацеливает. Выводы же теории оценок и сама теория, вообще говоря, меняются, если изменять постулируемое распределение.

Поэтому полагалось бы вычислить, к какой размытости в искомых оценках параметров приведет ожидаемая размытость постулируемого распределения. Данная задача дает повод для развития еще более тонких и внушительных теорий или по меньшей мере — для проведения трудоемких расчетов на ЭВМ. Тут мы подчеркнем, что оценить размытость распределения всерьез, т. е. путем аккуратного эксперимента, наверно, не проще, чем прямо оценить экспериментальным путем искомые параметры распределения.

Кроме того, теория оценок извлекает не абсолютный максимум информации, а максимум в смысле некоторых специфических критериев. Их практическая полезность не бесспорна. Наконец, эта теория опирается на постулат о независимости испытаний. С ним, как мы видели, тоже не все ладно.

Таким образом, можно не соглашаться с [25] в том, что теория оценок позволяет очень уж научно подойти к обработке наблюдений. Надо сказать, руководства по МС вообще не упускают случая отождествлять эту действительно непростую дисциплину с научным подходом в статистике. Здесь мы еще раз процитируем статью [2]: «Математический аппарат имеет некое гипнотическое свойство, и исследователи часто склонны безоговорочно верить своим расчетам, и тем больше верить, чем «кудрявее» примененный аппарат, чем больше времени своего и машинного потрачено и чем больше бумаги исписано». Так, о методе максимального правдоподобия, занимающем, пожалуй, первое место по сложности получаемых уравнений, нередко отзываются (например, в [25]) как об оптимальном в смысле точности доставляемых им оценок.

Научный подход прежде всего предполагает создание в любой прикладной теории интуитивно убедительного эмпирического базиса. Сложность, строгость и стоимость математического аппарата — так сказать, математической надстройки — должны сообразовываться с надежностью базиса. Это издавна применяемое прагматическое правило метко названо в [2] *принципом равнопрочности всех элементов прикладного исследования*. Теория оценивания, составляющая значительную часть всей МС, едва ли в должной мере удовлетворяет данному принципу.

2°. Постулат о существовании распределения вероятностей для выборочных оценок. Домысливание многих выборок. В теореме 2 говорят об одной выборке объема n, но подразумевают много таких выборок. При этом рассматривают вторичную случайную величину $\omega_{rn}(A)$, $r=1,2,\ldots$ и ее распределение вероятностей. Аналогично во всей МС обычно переходят от исходной $X(s)$ к вторичной величине $\alpha_{rn}[X]$, являющейся выборочной оценкой искомого параметра $\alpha[X]$ распределения вероятностей величины $X(s)$. При этом постулируют существование, а то и конкретный вид распределения вероятностей величины $\alpha_{rn}[X]$. В терминах этих вторичных распределений выражаются, скажем такие свойства выборочных оценок, как несмещенность, состоятельность, эффективность.

Допустим, по существу задачи всерьез интересуются величиной $\alpha_{rn}[X]$, а не просто параметром $\alpha[X]$, и соответственно проводят эксперимент по схеме многих серий, реально получая большое количество выборок. (По такой схеме проводилась, например, усиленная верификация законов Менделя, обсуждавшаяся в [7, 9, 10]). В этом случае роковой разницы между исходной и вторичной случайными величинами, видимо, нет, так что по поводу вторичных распределений можно лишь повторить все сказанное в постулате 1° относительно первичных распределений.

Но чаще всего фактически интересуются только параметром $\alpha[X]$. В МС обычно находят его оценку $\alpha_N[X]$, обработав как единое целое *весь* имеющийся протокол

$\{X(s)\}_1^N$. Напомним, что именно через N мы в главе 2 условились обозначать общее количество проведенных испытаний, а обработку упомянутого типа назвали схемой фиксированной серии. Применение этой схемы в МС сопровождают *домысливанием* многих выборок $S(r, N)$, $r=2,3, \ldots$, тогда как, повторяем, имеют дело с единственной реальной выборкой $S(1, N)=\{X(s)\}_1^N$. Путем такого мысленного погружения исходной задачи в схему многих серий стараются найти — с непременным участием постулата 1° и допущения о «независимости n испытаний» — оптимальную оценку $\alpha^*_N[X]=\alpha^*_{1N}[X]$. При этом погружении как раз и впадают в логическое зацикливание с его двумя парадоксами.

Альтернатива такова: за пределами статистической физики вести речь по возможности только о тех случайных величинах, которые действительно измеряются в *длинных* сериях испытаний. Соответственно ссылаться только на действительно измеряемые теоретико-вероятностные характеристики. Их измерение выполнять по схеме одной удлиняющейся (а не фиксированной) серии.

Интересно, что процедуры оценивания в МС рассчитаны именно на *домысливание* многих серий; обычно не разъясняют, как пользоваться этими процедурами, когда действительно берут *несколько* выборок $S(r, n)$, $r=\overline{1,Q}(N=Qn)$. Например, метод максимального правдоподобия даст тут *несколько* оптимальных оценок $\alpha^*_{rn}[X]$, $r=\overline{1,Q}$. Неясно, за что же боролись, выполняя сложные расчеты,— какая из этих оценок самая оптимальная? Данный метод, если присмотреться, исходит из того, что первая и единственная выборка — самая вероятная как раз в нужном нам смысле. Наверное, было бы правильней связать название такого метода с максимумом оптимизма.

Не менее странно при наличии нескольких выборок выглядит и концепция доверительного интервала, допустим, для вероятности $P(A)$. Найдя выборочные частоты $\omega_{rn}(A)$, $r=\overline{1,Q}$ и задавшись доверительной вероятностью $\mathcal{P}$, можно рассчитать соответствующее количество доверительных интервалов — так сказать доверительную полосу

$$\{(p_1(r), p_2(r)) | r=\overline{1,Q}\} \tag{17}$$

переменного сечения. Что затем с ней делать, неясно. Теория ручается здесь только за то, что при принятых допущениях (постулат 1° плюс допущение о «независимости n

испытаний») процент тех r из (17), для которых $P(A) \in (p_1(r), \ p_2(r))$, равен $\mathcal{P} \cdot 100$ для $Q \to \infty$. Относительно же доверительного интервала $(p_1(r), \ p_2(r))$, действительно вычисляемого на практике по первой и единственной выборке, вообще ничего определенного сказать, видимо, нельзя, поскольку он является всего лишь одним из сечений полосы (17).

В руководствах по МС все это либо не разъясняется, либо разъясняется крайне бегло, без выписывания аргумента r. В результате у многих, кто вычисляет доверительный интервал $(p_1(1), \ p_2(1))$, последний, вероятно, ассоциируется с таким *фиксированным* интервалом (p_1, p_2), в который попадает $\mathcal{P} \cdot 100$ процентов частот $\omega_{rn}(A)$, $r = \overline{1, Q}$ для $Q \to \infty$. Однако между двумя этими интервалами на самом деле нет ничего общего. Таким образом, к процитированному замечанию из [2] можно еще добавить, что доверительный интервал вообще не имеет того смысла, который в нем ищут.

3°. Постулат о независимости испытаний является для МС в известном смысле центральным, так как он позволяет выразить вторичные распределения через первичные и тем самым связывает воедино постулаты 1° и 2°. После внесения ясности в постулат 3° он вряд ли может считаться элементарным и нестеснительным, что мы и обсудим в следующей главе.

Выбор порогов различения, интуитивный по самой своей сути и неизбежный при проверке и сравнении между собой различных статистических гипотез, МС обойти, естественно, не может. Она лишь смещает этот выбор по направлению к неизмеряемым в реальном эксперименте величинам, обставляя его тем самым «кудрявым» математическим аппаратом.

Пусть, например, проверяют, согласуется ли измеренная эмпирическая функция распределения $F_n(x)$ с гипотетической функцией $F_X(x)$. Здесь для сравнения функций необходимо выбрать метрику ρ и порог различения ρ°. Если $\rho(F_n(x), \ F_X(x)) < \rho^\circ$, то согласие считают установленным, в противном случае — нет. В *критериях согласия* МС это, в сущности, и делается, только порог различения ρ° находят, можно сказать, путем решения некоторого уравнения $\varphi(\rho^\circ) = P^\circ$, где выбираемой величиной является P° — уровень значимости критерия. По своему смыслу P° представляет собой вторичную вероятность, к которой приходят, опираясь на постулаты 2°, 3°.

Подчеркнем, что выбирать P° нисколько не легче, чем выбирать ρ°, и, таким образом, особой пользы от этого смещения не видно. Вред же можно усмотреть в том, что создается иллюзия, будто надежность испытания гипотезы повышается за счет привлечения якобы нестеснительных постулатов и применения солидной математики. Ведь для того, чтобы решить упомянутое уравнение, приходится обращаться к внушительным таблицам, за которыми стоит настолько тонкая и непростая теория, что ее в руководствах обычно даже и не приводят. К тому же измерять вторичные вероятности, с тем чтобы верифицировать результаты расчета, в данных условиях явно не под силу, поскольку здесь испытывают затруднения и с измерением гораздо более простой первичной функции распределения $F_X(x)$. Сказанное относится к любым доверительным вероятностям.

Проблема представительности выборок, на которую МС главным образом и нацеливает свой математический аппарат, по всей видимости, должна быть чистосердечно отнесена к неформальной по самой своей сути проблеме — выбору исходных интуитивных посылок. О неформальном подходе с большим подъемом говорят в мини-пьесе [4].

Альтернативу методу МС здесь можно сформулировать следующим образом. Для того, чтобы наиболее убедительно подтвердить представительность выборки объема n относительно параметра $\alpha[X]$, необходимо взять *несколько* выборок $S(r, n)$, $r=\overline{1, Q}$ и убедительно продемонстрировать наличие равенства $\alpha_{rn}[X] \simeq \alpha_{kn}[X]$, $\forall r, k \leqslant Q$. Высказывая прогноз «как было, так и будет», можно затем предположить, что такая перманентность сохранится и для всех будущих выборок $S(r, n)$. Этот прогноз выглядит тем правдоподобней, чем больше Q. В терминах обучающей и проверочной выборок это означает, что суммарный объем последней должен намного превосходить объем обучающей выборки. Можно сказать еще и так: наличный протокол $\{X(s)\}_1^N$ необходимо разделить на *несколько* подвыборок объема $n=N/Q$ и прогнозировать лишь настолько грубые усредненные характеристики $\alpha_{rn}[X]$, чтобы упомянутое равенство действительно выполнялось (подобная прямая демонстрация представительности выборок близка по своему смыслу и к описанной нами схеме одной удлиняющейся серии, если удлинение происходит шагами $\Delta m=n$).

Величину Q и порог различения при демонстрации упомянутого равенства следует принимать, руководствуясь прецедентами, на откровенно интуитивном уровне в терминах измеряемых величин, без «призывания в свидетели» неизмеряемых доверительных вероятностей и интервалов, расчет которых, порою отождествляемый в МС (например, в сборнике [16]) с процедурой верификации, основан на далеко небезобидных постулатах и все равно приводит к логическому зацикливанию.

Такой эмпирико-индуктивный подход как раз и воплощал бы, ни много ни мало, фундаментальный принцип естественных наук—требование *многократной* повторяемости эксперимента и убедительной воспроизводимости его результата. Более обстоятельно все это обсуждалось в публикациях автора [9—13].

Глава 4. МИЗЕСОВСКИЕ ФОРМАЛИЗАЦИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЯХ

Обсуждая традиционную формулировку теоремы Бернулли (у нас — теорема 2), мы пришли к выводу, что для прояснения понятия независимости испытаний здесь необходимо указать четкое правило, по которому из одной исходной последовательности $\{X_A(s)\}_1^\infty$ для любого n формировался бы ансамбль статистически независимых последовательностей $\{X_{jn}(r)\}_1^\infty$, $j=\overline{1, n}$. Само собой разумеется, что правило должно как-то отражать интуитивные представления о независимости испытаний.

Приемлемой для интуиции основой при построении таких правил может служить общая идея Мизеса считать испытания s независимыми, если протокол $\{X(s)\}_1^\infty$ выглядит очень иррегулярным, плохо поддающимся прогнозированию (так называемый принцип невозможности системы игры, т. е. системы угадывания). Подобный протокол был назван Мизесом *иррегулярным коллективом* (испытаний).

Начиная с 20-х годов различные варианты формализации понятия иррегулярного коллектива развивали многие авторы, в том числе А. Вальд, В. Феллер, А. Черч, Г. Рейхенбах. К данной проблеме имеет отношение и алгоритмическая концепция вероятности А. Н. Колмогорова

(1963 г.), хотя эта концепция, видимо, лишь косвенно связана с идеей прогнозирования. Исходную библиографию по данной проблеме можно найти, например, в [27 гл. 3].

Мы остановимся на двух простейших формализациях понятия иррегулярного коллектива, по-видимому, достаточных для большинства практических задач.

Формализация по Ж. Виллю и А. Г. Постникову [22]. Рассмотрим двоичную последовательность — идеализированный протокол-индикатор $\{X_A(s)\}_1^\infty$ события A. Пусть существует мизесовская вероятность $P(1)=\lim\limits_{m\to\infty}\omega_m(A)$, которую удобно назвать безусловной вероятностью единицы.

Представим себе следующую идеализированную процедуру прогнозирования очередного члена последовательности $\{X_A(s)\}_1^\infty$. Допустим, мы перемещаем по этой последовательности единичными шагами как бы n-звенную гусеницу, вычленяющую на каждом своем шаге выборку

$$S(r, n)=\{X_A(r-1+j)\,|\,j=\overline{1, n}\},\ r=1,2,\ldots \qquad (18)$$

объема n. Здесь r — номер шага. Фиксируем определенную комбинацию δ_{n-1} из $n-1$ двоичных цифр, например, при $n=3$ любую из комбинаций 00, 01, 10, 11. Подсчитаем мизесовскую условную вероятность $P(1|\delta_{n-1})$ следования единицы в n-м звене выборки-гусеницы $S(r, n)$ в рассматриваемой комбинациии δ_{n-1}. Для этого найдем при $r=\overline{1, Q}$ количество $\mu_Q(\delta_{n-1})$ всех тех положений гусеницы, в которых она накрывает своими первыми $n-1$ звеньями комбинацию δ_{n-1}, а также количество $\mu_Q(1|\delta_{n-1})$ тех положений, в которых при этом условии в n-м звене гусеницы стоит единица. Потом вычислим частоту

$$\omega_Q(1|\delta_{n-1})=\mu_Q(1|\delta_{n-1})/\mu_Q(\delta_{n-1})$$

и найдем предел $P(1|\delta_{n-1})=\lim\limits_{Q\to\infty}\omega_Q(1|\delta_{n-1})$. Теперь сравним $P(1|\delta_{n-1})$ и $P(1)$.

На практике такая процедура осуществлялась бы как подсчет частот $\omega_m(A)$ и $\omega_Q(1|\delta_{n-1})$, исследование их устойчивости и сравнение между собой в процессе удлинения реального протокола $\{X_A(s)\}_1^m$ с тем, чтобы выяснить, не следовала ли единица за какой-либо из 2^{n-1} различных комбинаций δ_{n-1} с явно повышенной частотой. Обнаружение в прошлом, а главное, оправдывающийся прогноз такой перманентности означали бы устойчивое повышение процента угадываний того, наступит или не наступит событие A в очередном предстоящем испытании s.

Отправляясь от мизесовского термина «иррегулярный коллектив», назовем последовательность $\{X_A(s)\}_1^\infty$ *иррегулярной по Виллю—Постникову*, если для любой комбинации δ_{n-1} при любом n условная и безусловная вероятности единицы совпадают:

$$P\,(1|\delta_{n-1})=P\,(1),\quad \forall\delta_{n-1},\, n. \tag{19}$$

Это как раз и означает, что при естественной функции штрафа (учитывающей «перекос» в тех случаях, когда $P\,(1)\neq0{,}5$) не существует выигрышной стратегии угадывания, основанной только на измерении вероятностей $P\,(1|\delta_{n-1})$ и $P\,(1)$. В этом смысле здесь воплощен мизесовский принцип невозможности системы игры.

Так, периодическая последовательность $\{0011'\}$ (штрихом выделяем период) неиррегулярна, потому что условие (19) выполняется лишь для $n=2$. Уже при $n=3$ имеем:

$$P(1|00)=P\,(1|01)=1,\quad P\,(1|11)=P\,(1|10)=0,$$

тогда как $P\,(1)=0{,}5$. Например, для периодической последовательности [28] $\{11111000001000110010100111010110'\}$ условие (19) нарушается только при $n>5$. Машина, запрограммированная на проверку условия (19) только для $n\leqslant5$, сочла бы эту последовательность иррегулярной.

Объединим в одну последовательность $\{X_{jn}(r)\}_1^\infty$ двоичные числа, стоящие в выборках (18) на j-х местах:

$$X_{jn}(r)=X_A(r-1+j),\quad r=1,2,\ldots,\ j=\overline{1,n}; \tag{20}$$

выборка $S\,(r,n)$ представляет собой, очевидно, поперечное сечение ансамбля последовательностей (20). Определение (19) эквивалентно требованию статистической независимости последовательностей (20) при любом n. Таким образом, здесь реализована программа формирования из *одной* исходной последовательности целого *ансамбля* статистически независимых последовательностей.

Заметим, что последовательности (20) являются *сдвигами* исходной последовательности $\{X_A(s)\}_1^\infty$ на $j-1$ дискретов влево. Следовательно, иррегулярность по Виллю—Постникову последовательности $\{X_A\,(s)\}_1^\infty$ означает статистическую независимость ее сдвигов. Это определение особенно легко распространить на последовательности $\{X\,(s)\}_1^\infty$ общего вида. Мотивировка с помощью выборок-гусениц вида (18) сохраняется, только вместо вероятностей появляются распределения вероятностей. В [22] имеются конструктивные теоремы существования иррегулярных последовательностей. Об этих теоремах мы упоминали в главе 2 — в пункте, специально посвященном мизесовскому подходу.

Формализация по А. Коуплэнду [27]. Выборки-гусеницы (18) перемещались по протоколу-индикатору единичными шагами, и поэтому соседние выборки пересекались. В ряде практических задач более естественно формировать непересекающиеся выборки. Простейший закон формирования таких выборок сводится к разрезанию последовательности $\{X_A(s)\}_1^\infty$ на отрезки длины n:

$$S(r, n) = \{X_A(n(r-1)+j) | j=\overline{1, n}\}, \; r=1,2, \ldots \quad (21)$$

Приняв закон (21), можно мотивировать опирающееся на него понятие *иррегулярности по Коуплэнду* для последовательности $\{X_A(s)\}_1^\infty$ в точности так, как это делалось в модели Вилля — Постникова. Приходим к определению вида (19) с тем отличием, что теперь комбинацию δ_{n-1} должна накрывать своими первыми звеньями гусеница вида (21).

Таким образом, иррегулярность по Коуплэнду полностью аналогична иррегулярности по Виллю — Постникову, только гусеница Коуплэнда перемещается по протоколу не единичными шагами, а шагами величины n. В [22] доказано, что последовательность иррегулярна по Коуплэнду тогда и только тогда, когда она иррегулярна по Виллю — Постникову.

Общие замечания о рассмотренных формализациях. Последовательность, иррегулярная по Виллю — Постникову или Коуплэнду, является простейшим примером интуитивно мотивированной и строгой математической модели протокола таких испытаний, которые можно назвать независимыми и одинаковыми (одинаковыми потому, что распределения вероятностей всех формируемых последовательностей $\{X_{jn}(r)\}_1^\infty$ совпадают). Представление о плохой предсказуемости одного исходного протокола здесь действительно сведено довольно естественным способом к требованию статистической независимости ансамбля протоколов. В итоге дается такая трактовка независимости испытаний, при которой имеется достаточно ясное правило для количественной эмпирической проверки этой независимости. Проверка сводится к измерению статистических вероятностей, коль скоро к их измерению в соответствии с (6) сводится эмпирическая проверка статистической независимости протоколов.

Таким образом, после четкого оформления независимость испытаний с очевидностью оказывается понятием, производным от понятия статистической устойчивости, что мы и предположили еще при подведении итогов,в главе 2. Так что постулат 3° никак не может служить посылкой, из которой логически выводилась бы статистическая устойчивость, по крайней мере, понимаемая в неизбежном изначальном смысле — согласно схеме одной серии.

Постулат 3° даже в простейшем четком оформлении оказался явно сложнее, чем постулаты 1° и 2°. Поэтому верификация любых утверждений МС будет нацелена не на измерение искомых параметров α $[X]$ первичного распределения, а на проверку постулата 3°. Измерение же параметров α $[X]$, ради которых вроде бы и создается МС, составит при этом лишь небольшую и, так сказать, вступительную часть работы. Данное обстоятельство можно назвать третьим парадоксом МС.

Например, верификация результатов расчета доверительного интервала для вероятности $P(A)$ неизбежно начиналась бы с измерения этой вероятности по схеме одной серии (второй парадокс МС). Только после этого следует перейти к схеме многих серий, с тем чтобы найти доверительную полосу (17) и вторичную частоту $\omega_Q = \omega_Q(P(A) \in (p_1(r), p_2(r)))$. Затем надо измерить — опять-таки по схеме одной серии — вероятность $P = \lim\limits_{Q\to\infty} \omega_Q$, что сделать труднее, чем измерить $P(A)$ (первый парадокс МС). Наконец, следует сравнить P с доверительной вероятностью $\mathcal{P}$. Все этапы данной процедуры, связанные со схемой многих серий, в самом деле суть не что иное, как верификация постулата 3°: ведь искомую вероятность $P(A)$ измеряют в самом начале.

Ясно, что рассмотренные формализации представления о независимости n испытаний применимы всерьез лишь тогда, когда в самом деле проводят *много* раз по n испытаний, т. е. имеют весьма длинный протокол. За пределами статистической физики это условие чаще всего трудно выполнимо.

Словом, альтернатива методу МС состоит здесь в том, чтобы постулат 3° вводить в игру исключительно после того, как надежно измерены искомые параметры $\alpha[X]$ или само первичное распределение вероятностей.

Уточнение традиционных формулировок предельных теорем на основе понятия иррегулярного коллектива. Пользуясь понятием иррегулярности по Виллю — Постникову, можно сформулировать, например, следующую интерпретацию теоремы Бернулли, относящуюся к одному исходному протоколу и допускающую количественную эмпирическую проверку как своих условий, так и заключения. Согласно изложенному выше проверка целиком сводится к измерению статистических вероятностей по схеме одной серии.

Теорема 3. Пусть проводятся испытания, в результате которых получен протокол-индикатор — последовательность $\{X_A(s)\}_1^\infty$. Пусть выполнены следующие два условия:

1) для последовательности $\{X_A(s)\}_1^\infty$ существует предел $p=P(A)=\lim\limits_{m\to\infty}\omega_m(A)$;

2) испытания независимы в том смысле, что последовательность $\{X_A(s)\}_1^\infty$ иррегулярна по Виллю — Постникову.

Пусть, далее, $\omega_Q(n, \varepsilon)$ — частота выполнения неравенства $|\omega_{rn}(A)-P(A)|\leqslant\varepsilon$ для серии выборок-гусениц вида (18) при $r=\overline{1, Q}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P(n, \varepsilon)=1, \ \forall\varepsilon>0,$$

где

$$P(n, \varepsilon)=\lim_{Q\to\infty}\omega_Q(n, \varepsilon).$$

С математической точки зрения теорема 3 является теоремой 1, примененной к ансамблю статистически независимых последовательностей (20). В теореме 3 можно постулировать и иррегулярность по Коуплэнду.

Сравнивая теорему 2 с теоремой 3, видим, что в последней достигнута полная ясность во всех вопросах, остающихся без ответа при анализе традиционных формулировок предельных теорем. Теорема 3 с очевидностью не претендует на «математическое обоснование» статистической устойчивости $\omega_m(A)\simeq P(A)$, $\forall m\gg1$, которая выступает здесь в качестве явно оговоренного условия 1. О нетривиальности условия 2 мы только что говорили. Эмпирическая проверка условия 2 невозможна без предварительной проверки условия 1. Чтобы оттенить это, мы расположили условия теоремы 3 именно в таком порядке, а раньше аналогично обошлись с теоремой 2. Во всех традиционных формулировках теоремы Бернулли принят обратный порядок записи условий. Это лишний раз подтверждает, что во всех руководствах по МС независимость испытаний считают самым элементарным и нестеснительным условием, отождествляя ее, в сущности, с кажущейся независимостью испытаний, которая определяется контролируемыми условиями эксперимента U. Мы уже отмечали, что количественные понятия теории вероятностей не имеют ни малейшей формально-логической связи с условиями U.

Из условий 1 и 2 в теореме 3 выводится дополнительное описание свойств последовательности $\{X_A(s)\}_1^\infty$ в терминах вторичной вероятности $P(n, \varepsilon)$, сопряженное, с точки зрения прикладника, с логическим зацикливанием.

Итак, после прояснения традиционных формулировок предельных теорем получается нечто отличное от фундаментальных предложений, каковыми представлялись эти теоремы в начальный период развития теории вероятностей. Так происходит из-за того, что обнажается нетривиальность эмпирической проверки независимости испытаний и заключений предельных теорем. Сходную метаморфозу претерпевают все утверждения МС, опирающиеся на постулат 3°. С «зависимыми испытаниями», например марковскими, дело принимает подобный же оборот.

За пределами МС с ее основными постулатами 1° — 3° понятие иррегулярного коллектива находит действительно важные применения. Но это, как говорится, уже другая повесть.

Укажем только, что иррегулярность по Виллю — Постникову трудно обойти стороной в задачах, где в самой постановке фигурируют сдвиги функций. Такая ситуация налицо, к примеру, в тех версиях теории массового обслуживания, которые лучше всего подходят для обычного «безансамблевого» моделирования [29, с. 224, 270], [30]. Упомянем еще задачу вычисления усредненных по времени характеристик сигналов на выходе линейных стационарных динамических систем (сдвиги там присутствуют в интеграле свертки), когда строят «безансамблевую» статистическую теорию случайных сигналов (см., например, [31]). Мы применяем кавычки потому, что здесь все равно появляется ансамбль, но это ансамбль сдвигов *одной* исходной функции, в частности, последовательности. Иррегулярность по Виллю — Постникову служит в отмеченных задачах вариантом концепции белого шума. Для моделирования «безансамблевого» белого шума, по-видимому, представляют интерес нормальные периодические системы [28].

Один пример из классической статистической физики (вместо заключения к нашему рассказу о мизесовском подходе). Обсудим в терминах мизесовского подхода старую задачу о пространственном линейном осцилляторе, пребывающем в тепловом равновесии с газообразным термостатом: частица A притягивается к неподвижной точке O с силой, пропорциональной вектору $\overrightarrow{OA}$. Свободное движение частицы A совершается по эллипсу с частотой обращения ν, не зависящей от параметров эллипса, которые меняются после каждого соударения частицы A с какой-либо частицей термостата (обозначим последнюю через B). Считаем соударения мгновенными, упругими, парными, а все частицы одинаковыми.

Повторим, что основа мизесовского подхода состоит не в предельных переходах, а, пожалуй, в том простом обстоятельстве, что здесь выписывают и аккуратно интерпретируют все аргументы рассматриваемых величин. В итоге становится ясным физический смысл всех усреднений, о которых ведут речь. Мы будем рассматривать скорость частицы A как функцию $\vec{u}$ от номера $s=\ldots, -1, 0, 1, \ldots$ соударения частицы A с частицами термостата. Пусть это будет скорость *сразу после* соударения. Обозначим через $\vec{v}\,(s)$ скорость частицы B непосредственно *перед* этим соударением. Таким образом, рассматриваемые средние для частиц A и B — это средние на одно соударение. Вероятность пребывания, скажем, скорости $\vec{u}\,(s)$ в данной области трехмерного пространства скоростей имеет соответственно смысл относительной доли тех соударений, после которых скорость $\vec{u}\,(s)$ попадает именно в данную область.

Скорость $\vec{v}\,(s)$ представляет собой как бы случайное извлечение из колоссального коллектива

$$\{\vec{v}_i\,(s_i)|\ s_i=\ldots, -1, 0, 1, \ldots\},\quad i=1, 2, \ldots$$

скоростей частиц термостата. Здесь i — номер частицы, а s_i — номер соударения i-ой частицы с другими частицами; рассматриваем скорость непосредственно *перед* соударением. Отправляясь от мизесовского принципа невозможности системы игры, постулируем совпадение распределения случайной величины $\vec{v}(s)$ с распределениями, одинаковыми каждой из величин $\vec{v}_i(s_i)$. Такая разновидность иррегулярности коллектива еще менее тривиальна, нежели обе рассмотренные выше модели, но, вероятно, приемлема для интуиции. Тут не так уж плохо выражена идея хаоса и сильного перемешивания в большом рое частиц.

Пусть все частицы суть материальные точки, а соударения — центральны. Тогда частицы A и B обменяются при соударении скоростями и, следовательно, распределение скорости $\vec{u}(s)$ осциллятора совпадает с распределением скорости $\vec{v}(s)$. Таким образом, в силу принятого «постулата иррегулярности» средние кинетические энергии E и ϑ осциллятора и любой частицы термостата совпадают. Напомним, что имеются в виду средние на одно соударение. Предположение о центральности соударений здесь несущественно, и его можно заменить обычным допущением о равноправности всех направлений, по которым происходят соударения.

Предположим далее, что соударения настолько редки, что частица A успевает сделать между двумя последовательными соударениями *много* витков по своей эллиптической орбите. В этом случае логично постулировать равномерность распределений и статистическую независимость местоположений (точнее — фаз) тех двух точек на эллиптической орбите, в которых произошли два последовательных соударения частицы A, «включившие» и «выключившие» именно эту орбиту. Отсюда следует равенство средних кинетической и потенциальной энергий осциллятора.

Пусть теперь частицы имеют конечный диаметр a. Допущение о редкости соударений сразу приводит в этом случае к более интересным, если можно так выразиться, негиббсовским следствиям. Дело в том, что эллиптическая орбита теперь не геометрическая линия, а «бублик» — тороидальная трасса. И медленная частица B не сможет (попросту не успеет за максимальное отведенное ей время $T=1/\nu$) проникнуть к оси трассы — к линии, описываемой центром частицы A. Критерий медленности — скорость $\vec{v}(s)$ не должна превосходить по модулю величину порядка $a\nu$.

Стало быть, из-за наличия тороидальной трассы возникают своего рода кинематические ограничения, вследствие которых медленные частицы B бьют только по тем точкам частицы A, которые лежат вдали от оси трассы. Этот «эффект пропеллера» в среднем меняет условия обмена энергией между частицами A и B. Медленные частицы B забирают при соударениях у частицы A в среднем меньше, а отдают ей больше кинетической энергии, чем при отсутствии тороидальной трассы, т. е. при $a=0$. Для быстрых же частиц B все остается по-прежнему.

Мы говорим об эффекте пропеллера, опираясь на следующую аналогию: слабо брошенный предмет не может быть разрублен быстро вращающимся винтом. Предмет сравнительно благополучно отскочит как бы от сплошного диска, не успев проникнуть внутрь трассы винта, где только и можно забрать у винта хорошую порцию вращательной кинетической энергии. Такой эффект пропеллера может усилиться, если оболочки винта и предмета мягкие.

В итоге зависимость $E(\vartheta)$ пойдет выше «гиббсовской» зависимости $E(\vartheta)=\vartheta$. Превышение должно становиться более существенным по мере уменьшения ϑ, т. е. температуры термостата, поскольку при этом увеличивается доля медленных частиц B. Это означает, что теплоемкость $dE(\vartheta)/d\vartheta$ осциллятора с уменьшением ϑ где-то будет падать. Может появиться и конечная энергия $E(0)$ нулевых колебаний, определяемая характерным параметром $a\nu$. Заметим, что средние кинетическая и потенциальная энергии осциллятора совпадают на прежних основаниях. В таком стиле можно рассмотреть и двумерные (но не одномерные!) осциллятор и термостат.

Обращаем внимание на то, что эффект пропеллера груб. Если пользоваться мизесовским языком с его скрупулезностью в выяснении смысла проводимых усреднений и «безансамблевой» направленностью, то мимо этого эффекта прямо-таки трудно пройти. Его приходится иметь в виду всякий раз, когда в движении молекул имеются периодические или квазипериодические составляющие, а температура настолько низка, что становится ощутимым время, затрачиваемое молекулами в их поступательном движении на покрытие расстояний, равных по порядку величины диаметру атомов, из которых состоят молекулы. Так обстоит дело, например, при подсчете теплоемкости двухатомного газа. Правда, если считать соударения мгновенными, объяснить этим эффектом здесь температурную зависимость теплоемкости не удается, поскольку в отличие от осциллятора у «гантели», состоящей из двух жестко скрепленных шариков-атомов, угловая скорость не фиксирована, а меняется, так сказать, синхронно с температурой термостата. Однако спад теплоемкости здесь все же можно получить, наложив определенные ограничения на вид потенциала взаимодействия атомов (принадлежащих к разным молекулам). Потенциал должен быть таким, чтобы время соударения возрастало с уменьшением скорости сближения w соударяющихся атомов быстрее, чем $1/w$. Интересно, что для этого необходимо наличие сил притяжения, а не только отталкивания.

Соображения, сходные с изложенными, нам удалось найти только в работе [32]. Но, как нам кажется, именно использование немизесовского языка, к сожалению, не позволило продвинуться в [32] достаточно далеко. Заметим, что руководства по статистической физике почему-то без оговорок утверждают, что спад теплоемкости и конечную энергию нулевых колебаний классическая физика предсказывать не в состоянии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Альтернативу методу математической статистики, обрисованную выше, можно в немногих словах охарактеризовать так: в прикладных исследованиях, точнее за пределами фундаментальной физики, по возможности воздерживаться от введения в исходные посылки таких теоретико-вероятностных величин, которые не измеряются в натурных экспериментах (так называемый численный эксперимент сравнивает между собой две модели — машинную и «бумажную», но не модель с реальностью). Объекты изучения в экономике, социологии и даже в современной технике чаще всего слишком сложны и нестабильны для построения их полезных моделей, исходя из удаленных от эксперимента общих принципов, характерных для основ физики. Здесь, так сказать, рентабельны оперативные феноменологические модели без особых претензий на фундаментальность. В соответствии с принципом равнопрочности всех элементов прикладного исследования здесь следует с настороженностью относиться к привлечению сложной математики.

Закончим цитатой из Н. Винера [33], которого трудно отнести к противникам математизации: «Успехи математической физики вызвали у социологов чувство ревности к силе ее методов, чувство, которое едва ли сопровождалось отчетливым пониманием интеллектуальных истоков этой силы... Подобно тому, как некоторые отсталые народы заимствовали у Запада его обезличенные, лишенные национальных примет, одежды и парламентские формы, смутно веря, будто эти магические облачения и обряды смогут их сразу приблизить к современной культуре и технике, так и экономисты принялись облачать свои весьма неточные идеи в строгие формулы интегрального и дифференциального исчислений... Как ни труден отбор надежных данных в физике, гораздо сложнее собрать обширную информацию экономического или социологического характера, состоящую из многочисленных серий однородных данных... В этих обстоятельствах безнадежно добиваться слишком точных определений величин, вступающих в игру. Приписывать таким неопределенным по самой своей сути величинам какую-то особую точность бесполезно, и, каков бы ни был предлог, применение точных формул к этим слишком вольно определяемым величинам есть не что иное, как обман и пустая трата времени».

ЛИТЕРАТУРА

1. Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. Прикладная математика. Предмет, логика, особенности подхода. Киев, «Наукова думка», 1976. 270 с.

2. Грекова И. Методологические особенности прикладной математики на современном этапе ее развития.— «Вопросы философии», 1976, № 6, с. 104—114.

3. Веников В. А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах. М., «Высшая школа», 1978, 540 с.

4. Высотский М. Под знаком интеграла.— «Знание — сила», 1979, № 3, с. 43—44.

5. Тутубалин В. Н. Теория вероятностей в естествознании. М., «Знание», 1972, 48 с.

6. Тутубалин В. Н. Статистическая обработка рядов наблюдений. М., «Знание», 1973, 64 с.

7. Т у т у б а л и н В. Н. Границы применимости (вероятностно-статистические методы и их возможности). М., «Знание», 1977, 64 с.

8. Т у т у б а л и н В. Н. Теория вероятностей. М., МГУ, 1972, 230 с.

9. А л и м о в Ю. И. О проблемах приложения теории вероятностей, рассмотренных в работах В. Н. Тутубалина.— «Автоматика», 1978, № 1, с. 71—82.

10. А л и м о в Ю. И. Еще раз о реализме и фантастике в приложениях теории вероятностей.— «Автоматика», 1979, № 4, с. 103—110.

11. А л и м о в Ю. И. Элементы теории эксперимента. Измерение моментов случайных величин, векторов и процессов. Учебное пособие. Свердловск, изд-во УПИ, 1976, 104 с.

12. А л и м о в Ю. И. Элементы теории эксперимента. Измерение вероятностей и распределений вероятностей. Учебное пособие. Свердловск, изд-во УПИ, 1977, 80 с.

13. А л и м о в Ю. И. Элементы теории эксперимента. Опытная проверка утверждений математической статистики. Учебное пособие. Свердловск, изд-во УПИ, 1978. 92 с.

14. Т ь ю к и Д ж. У. Анализ данных, вычисления на ЭВМ и математика.— В сб.: «Современные проблемы математики». М., «Знание», 1977, с. 41—64.

15. К и т а й г о р о д с к и й А. И. Молекулярные силы. М., «Знание», 1978. 64 с.

16. Прогностика. Терминология, вып. 92. М., «Наука», 1978, 32 с.

17. Индукция. Статья в Большой Советской Энциклопедии, т. 10. М., «Советская энциклопедия», 1970, с. 263—264.

18. Н е й м а н Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики. М., «Наука», 1968, 448 с.

19. Н а л и м о в В. В. Язык вероятностных представлений.— «Автоматика», 1979, № 1, с. 62—74.

20. Б р и л л ю э н Л. Научная неопределенность и информация. М., «Мир», 1966, 272 с.

21. Б о р н М. Непрерывность, детерминизм, реальность.— В кн.: Размышления и воспоминания физика. М., «Наука», 1977, с. 162—187.

22. П о с т н и к о в А. Г. Арифметическое моделирование случайных процессов. Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова. т. 57, М., изд-во АН СССР, 1960, 84 с.

23. Н и к и т и н а Е. П., Ф р е й д л и н а В. Д., Я р х о А. В. Коллекция определений термина «статистика». М., изд-во МГУ, 1972, 46 с.

24. В е н е ц к и й И. Г. Вариационные ряды и их характеристики. М., «Статистика», 1970, 160 с.

25. Б о я р с к и й Э. А. Порядковые статистики. М., «Статистика», 1972. 120 с.

26. К о л м о г о р о в А. Н. Теория вероятностей.— В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение. М., изд-во АН СССР, 1956, с. 252—281.

27. Кнут Д. Искусство программирования для ЦВМ, т. 2, М., «Мир», 1977, 724 с.
28. Коробов Н. М. Нормальные периодические системы и их приложение к оценке сумм дробных долей.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1951, № 1, т. 15, с. 17—46.
29. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М., «Наука», 1972, 368 с.
30. Алимов Ю. И., Мучник В. Л. Неравенства и счетномерные вероятностные пространства в «безансамблевой» мизесовской теории массового обслуживания.— В кн.: Обобщенные функции и векторные меры. Труды Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР, вып. 31. Свердловск, 1979, с. 75—89.
31. Алимов Ю. И. О временном статистическом описании случайных сигналов.— «Автоматика и телемеханика», 1969, № 8, с. 16—30.
32. Jaffe G. Über die Ungültigkeit des Gleichverteilungsatzes bei Oszillatoren und Rotatoren.— «Annalen der Phisik», 1924, b. 74, c. 628—660.
33. Винер Н. Творец и робот. М., «Прогресс», 1966, 104 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Юрий Иванович АЛИМОВ
АЛЬТЕРНАТИВА МЕТОДУ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Главный отраслевой редактор В. П. Демьянов
Редактор Г. Г. Карвовский. Мл. редактор Т. Г. Иншакова. Обложка художника Л. П. Ромасенко. Худож. редактор М. А. Бабичева. Техн. редактор А. М. Красавина. Корректор И. В. Сорокина

ИБ 2472

Сдано в набор 16.01.80 г. Подписано к печати 18.02.80 г. Т-05 437.
Формат 84×108 1/32. Бумага № 3. Гарнитура литературная.
Печать высокая. Бум. л. 1. Печ. л. 2. Усл. печ. л. 3,36.
Уч.-изд. л. 3,53 Тираж 35 350 экз. Заказ 3196.
Цена 11 коп. Издательство «Знание». 101835, ГСП, Москва, Центр, проезд Серова, д. 4. Индекс заказа 804303
Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

11 коп.

Индекс 70096